QA
36
.E56
v.3C
pt.2-3

I3. Heft 2/3.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
UND DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN. . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN. . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN. . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . . K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND III3. HEFT 2/3. AUSGEGEBEN AM 11. SEPTEMBER 1903.

MIT 14 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

☞ Bisher erschien: Band I, Heft 1—7; Band II1, Heft 1—4; Band II2, Heft 1; Bd. III2, Heft 1; Bd. III3, Heft 1—3; Bd. IV1, Heft 1—3; Bd. IV2, Heft 1—2; Bd. V1, Heft 1.

☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlusshefte eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik (hrsg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.

Inhalt des vorliegenden Heftes.

		Seite
IIID 4.	Besondere transcendente Kurven. Von **G. Scheffers** in Darmstadt	185
IIID 5.	Besondere Flächen. Von **R. v. Lilienthal** in Münster i/W.	269
IIID 6a.	Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander. Von **A. Voss** in Würzburg	355

Unter der Presse:

Band II. Teil 1. Variationsrechnung. Von **A. Kneser** in Berlin.
- IV. - 1. Geometrie der Massen. Von **G. Jung** in Mailand. — Die graphische Statik der starren Körper. Von **L. Henneberg** in Darmstadt.
- V. - 2. Standpunkt der Fernwirkung, die Elementargesetze. Von **R. Reiff** in Stuttgart und **A. Sommerfeld** in Aachen. — Standpunkt der Feldwirkung, Maxwell'sche Theorie. Von **H. A. Lorentz** in Leiden.

Disposition von Band III: Geometrie, in 3 Teilen.

I. Teil: A. Rein geometrische Theorien.

1. Prinzipien der Geometrie: **F. Enriques** in Bologna.
2. Elementargeometrie: **M. Simon** in Strassburg i. E. und **J. Neuberg** in Lüttich.
3. Raumeinteilungen und Polyeder: **H. Steinitz** in Charlottenburg.
4. Analysis situs: **P. Heegaard** in Vedbaek bei Kopenhagen.
5. Projektive Geometrie: **A. Schoenflies** in Königsberg.
6. Darstellende Geometrie: **E. Papperitz** in Freiberg i. S. (Mit Anhang üb. graphische Darstellungen u. Modelle.)
7. Geometrie d. Kreise u. Kugeln: **H. Burkhardt** in Zürich.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1a. Die Grundbegriffe der Geometrie in analytischer Fassung: **H. v. Mangoldt** in Aachen.
1b. Algebraische Gesichtspunkte u. Methoden: **G. Fano** in Turin.
2. Die verschiedenen Koordinatensysteme: **E. Müller** in Wien.
3. Systeme geometr. Analyse: **H. Burkhardt** in Zürich.
4. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: **J. Sommer** in Bonn.

II. Teil: C. Algebraische Geometrie.

1. Kegelschnitte: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
2. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.
3. Spezielle ebene algebr. Kurven: **G. Kohn** in Wien.
4. Flächen II. Ordnung: **O. Staude** in Rostock.
5. Allgem. Theorie der höheren algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna.
6. Spezielle algebraische Flächen: **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
7. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** in Dresden.
8. Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** in Turin.
9. Liniengeometrie und Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
10. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **G. Castelnuovo** in Rom u. **F. Enriques** in Bologna.
11. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** i. Kopenhagen.

III. Teil: D. Differentialgeometrie.

1, 2. Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Kurven u. Flächen: **H. v. Mangoldt** in Aachen.
3. Kurven auf den Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Darmstadt.
5. Besondere transcendente Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
6a. Abwickelung und Abbildung zweier Flächen auf einander: **A. Voss** in München.
6b. Andere Differentialgleichungen der Geometrie: **C. Guichard** in Clermont-Ferrand.
7. Berührungstransform.: **G. Scheffers** in Darmstadt.
8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Leipzig.
9. Differentielle Liniengeometrie u. Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
10. Differentialgeometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten: **P. Stäckel** in Kiel.
11. Approximative Integration der Differentialgleichungen: **K. Heun** in Karlsruhe.

III D 4. BESONDERE TRANSCENDENTE KURVEN.

Von

G. SCHEFFERS

IN DARMSTADT.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.

I. Rollkurven.

2. Allgemeines.
3. Trochoiden, ihre Scheitel- und Wendepunkte.
4. Verschiedene Arten der Erzeugung von Trochoiden.
5. Einteilung der Trochoiden, Epi- und Hypocykloiden.
6. Gemeine Cykloiden, Kreisevolventen und archimedische Spiralen.
7. Rektifikation der Epi- und Hypocykloiden.
8. Natürliche Gleichung der Cykloiden, cykloidale Kurven.
9. Mit den Cykloiden zusammenhängende Kurven, insbesondere Rhodoneen.
10. Rollkurven mit geradliniger Polbahn.
11. Kurven von *Delaunay* und *Sturm*.
12. Para- und Hypercykloiden.

II. *W*-Kurven.

13. Definition der *W*-Kurven.
14. Zwei Arten von transcendenten ebenen *W*-Kurven.
15. Sätze über allgemeine *W*-Kurven der ersten Art.
16. Logarithmische Spiralen.
17. Orthogonale Trajektorien konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen oder Hyperbeln.
18. Dreieckspotentialkurven und adiabatische Kurven.
19. Sätze über *W*-Kurven der zweiten Art.
20. *W*-Kurven im Raume, gemeine Schraubenlinien.

III. Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen.

21. Sinusspiralen.
22. Abbildung der Geraden der Ebene als Sinusspiralen.
23. Einige Eigenschaften der Sinusspiralen.
24. Rektifikation der Sinusspiralen.
25. Triangulär- und tetraedral-symmetrische Kurven.
26. *Cesàro*'sche, insbesondere *Ribaucour*'sche Kurven.
27. Kettenlinien und Traktricen.

IV. Transcendente Raumkurven.

28. Charakteristische Eigenschaft der *Bertrand*'schen Kurven.
29. Endliche Gleichungen der *Bertrand*'schen Kurven.
30. Die *Bertrand*'schen Kurven in der Flächentheorie.
31. Kurven konstanter Krümmung, Kurven konstanter Torsion und allgemeine Schraubenlinien.
32. Eigenschaften der allgemeinen Schraubenlinien.
33. Verallgemeinerungen der *Bertrand*'schen Kurven.
34. Loxodromen.
35. Minimalkurven und Kurven der tetraedralen Komplexe.
36. Gemeinsame Eigenschaften einiger Kurvenfamilien.

V. Sonstiges.

37. Aufzählung einiger nicht-besprochenen transcendenten Kurven.
38. Einteilung der ebenen transcendenten Kurven.
39. Register der erwähnten Kurven.

Litteratur.

Lehrbücher.

P. Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860. (Auch als Thèse, Paris 1859, mit derselben Paginierung, aber ohne Vorwort, Inhaltsverzeichnis und Anhang erschienen.)
L. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873.
— Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876.
E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901 (Übersetzung von: *E. Cesàro,* Lezioni di geometria intrinseca, Neapel 1896).
G. Loria, Spezielle algebraische und transcendente Kurven der Ebene, Theorie und Geschichte, deutsch von *F. Schütte,* Leipzig 1902*).

Ausserdem viel zerstreutes Material in den Lehr- und Übungsbüchern der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung (II A 2) und der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen (III D 1, 2).

Die Zeitschriftenlitteratur findet man in den Anmerkungen, daselbst auch einige Monographien über spezielle transcendente Kurven.

1. Einleitung. Eine Kurve in der Ebene, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten x, y *nicht* auf eine algebraische Form gebracht werden kann, heisst *transcendent.* Die Gesamtheit aller der-

*) Dem Entgegenkommen des Herrn Verfassers verdankten wir die Einsicht in dies Werk, mit dessen Reichhaltigkeit wir in Bezug auf die *ebenen* Kurven absolut nicht in Wettbewerb treten können, schon während seines Druckes. Bezüglich der *älteren Geschichte der ebenen transcendenten Kurven* verweisen wir grundsätzlich auf dies Buch, neben dem man *M. Cantor,* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1, Leipzig 2. Aufl. 1894; 2, 2. Aufl. 1900; 3, 2. Aufl. 1901, zu Rate ziehen möge.

jenigen Punkttransformationen der Ebene, die jede algebraische Kurve wieder in eine algebraische Kurve verwandeln, ist die Gruppe aller *algebraischen* Transformationen der Ebene [II A 6, Nr. **1, 19**]. Daher gilt die Definition der transcendenten Kurven nicht nur für rechtwinklige Koordinaten x, y, sondern überhaupt für solche Punktkoordinaten ξ, η, die durch zwei in x, y, ξ, η algebraische Gleichungen definiert werden, und ebenso für solche homogene Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, deren Verhältnisse zusammen mit x, y zwei algebraischen Gleichungen genügen, wie z. B. für allgemeine projektive Koordinaten [III B 2], während dagegen z. B. bei Benutzung von Polarkoordinaten der analytische Unterschied zwischen algebraischen und transcendenten Kurven verschwindet. Wendet man die Gruppe aller algebraischen Transformationen der Ebene auf die Gesamtheit *aller* ebenen Kurven an, so bilden die algebraischen Kurven für sich eine invariante Mannigfaltigkeit, ebenso die transcendenten.

Leibniz nannte insbesondere diejenigen Kurven *interscendent*, deren Gleichungen durch Nullsetzen von Polynomen in x, y mit irrationalen Exponenten hervorgehen[1]). Für die Raumkurven gilt Entsprechendes.

Während für die algebraischen Kurven natürliche Einteilungen (nach Ordnung, Klasse u. s. w.) vorhanden sind, fehlen sie bei den transcendenten Kurven. Dabei verdanken manche dieser Kurven ihr Bekanntsein dem Zufall. Die Benennung der transcendenten Kurven ist daher misslich, ebenso die Aufgabe, aus der grossen Zahl der transcendenten Kurven eine Auswahl zu treffen. Wollten wir alle einigermassen bekannten transcendenten Kurven erwähnen, so könnten wir bei dem knappen Raume nicht viel mehr als eine Sammlung von Definitionen geben. Da aber *G. Loria* in dem oben erwähnten Buche eine gründliche Zusammenstellung der bisherigen Arbeiten über *ebene* transcendente Kurven bietet, erscheint es uns richtig, nur gewisse Klassen solcher Kurven ausführlicher zu besprechen[2]), nämlich erstens Rollkurven (darunter die Cykloiden, Kreisevolventen und archimedischen Spiralen), zweitens die W-Kurven (darunter die logarithmischen Kurven und logarithmischen Spiralen, zu denen im Raume die gemeinen Schraubenlinien treten), drittens die Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen (darunter die Kettenlinien und Traktricen). Unter diese drei Rubriken nämlich lassen sich wohl ziemlich alle wichtigeren ebenen transcendenten Kurven einreihen. Der vierte Abschnitt ist transcen-

1) Vgl. *L. Euler*, Introductio in analysin infinitorum 2, Lausannae 1748, p. 285, wo das Beispiel $y = x^{\sqrt{2}}$ besprochen wird.

2) Zum Teil ausführlicher als *G. Loria*, zum grösseren Teil aber weniger ausführlich als dieser.

denten Raumkurven gewidmet (*Bertrand*'sche Kurven, allgemeine Schraubenlinien, Loxodromen, Minimalkurven, tetraedrale Kurven), während wir im fünften Abschnitt mehrere nicht behandelte Kurven citieren und über Versuche zur Einteilung der transcendenten ebenen Kurven berichten.

Solche Familien transcendenter *ebener* Kurven, deren Gleichungen noch willkürliche Funktionen enthalten, berücksichtigen wir nicht, ebenso wenig Kurven, die nur zur Darstellung transcendenter Funktionen dienen sollen. Von den transcendenten *Raum*kurven betrachten wir nur solche, die unabhängig von Flächen definiert werden können.

Zeichnungen von ebenen transcendenten Kurven bietet das *Loria*'sche Buch in grösserer Anzahl.

I. Rollkurven.

2. Allgemeines. Die Bahnkurven der Punkte einer ebenen Figur, die sich stetig in ihrer Ebene bewegt, heissen *Rollkurven* (*Rouletten*), weil die Bewegung nach III D 1, 2, Nr. 17 und IV 3, Nr. 8 durch Rollen einer mit der Figur starr verbundenen *Polkurve* auf einer in der Ebene festen *Polbahn* erzeugt werden kann. An den angegebenen Stellen ist schon bemerkt, dass die Tangenten der Rollkurven in jedem Momente der Bewegung senkrecht zu den Geraden sind, die die beschreibenden Punkte mit dem *momentanen Drehpol*, d. h. dem Berührungspunkt von Polbahn und Polkurve, verbinden; ferner, dass die Aufgabe, die Krümmungsmittelpunkte der Rollkurven zu finden, auf die Aufgabe zurückkommt, sie für den Fall zu finden, dass Kreis auf Kreis rollt.

G. Ph. de la Hire[3]) zeigte zuerst, dass *jede* ebene Kurve als Rollkurve erzeugt werden kann. Wir beschränken uns auf solche Probleme der Bewegung, durch die man zu besonders wichtigen transcendenten Kurven geführt wurde.

3. Trochoiden, ihre Scheitel und Wendepunkte. Die Polbahn und die Polkurve seien Kreise. Dann heissen die Rollkurven *Trochoiden*[4]) und zwar *Epi-* oder *Hypotrochoiden*, je nachdem der rollende Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen liegt[5]) [6]). Algebraisch ist

3) Traité des roulettes, Paris Mém. 1706 [1707]. *E. Catalan,* Nouv. Ann. Math. (1) 15 (1856), p. 102—108, bewies überdies, dass man dabei die Polbahn beliebig in der Ebene der Kurve annehmen darf.

4) Trochoide (Rad- oder Scheibenlinie) nannte *P. de Roberval* die gemeine Cykloide (s. Nr. 6); vgl. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 461.

5) Geschichtliches bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 479—481, *Hâton de la Goupillière,* L'Intermédiaire des math. 5 (1898), p. 234, 235, *E. Wölffing,* ebenda,

eine Trochoide nur dann, wenn das Verhältnis der Radien beider Kreise rational ist (ausserdem in dem trivialen Fall, dass der beschreibende Punkt die Mitte des rollenden Kreises ist).

Es sei: C Mitte, R Radius des festen Kreises, M Mitte, r Radius des rollenden Kreises. Dabei sei R stets >0, dagegen $r \gtrless 0$, je nachdem M und C auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des momentanen Drehpols O, des Berührungspunktes beider Kreise, liegen. Der beschreibende Punkt P habe von M den Abstand $a \gtrless 0$, je nachdem $r \gtrless 0$ ist. Der Krümmungsmittelpunkt K von P liegt auf OP und ist nach III D 1, 2, Nr. **17**, zu konstruieren. Liegt P insbesondere auf dem Umfang des rollenden Kreises, so liegt K auf der Polaren von P hinsichtlich des festen Kreises[7]). P beschreibt momentan einen *Wendepunkt*, wenn er auf demjenigen Kreis (*Wendekreis*) liegt, der in O den festen Kreis berührt und dessen Radius gleich $Rr : 2(R - r)$ ist[8]), wobei das Vorzeichen anzeigt, ob die Mitte des Wendekreises auf derselben oder auf der andern Seite von O liegt wie C. Ferner beschreibt P momentan einen *Scheitel* (vgl. III D 1, 2, p. 30), wenn P entweder auf der Centralen CM liegt (*Hauptscheitel*) oder auf dem Kreis (*Scheitelkreis*[9])) liegt, der in O den festen Kreis berührt und den Radius $3Rr : (4R - 2r)$ hat, wobei das Vorzeichen dieselbe Bedeutung wie vorhin hat (*Nebenscheitel*). Jede Trochoide hat Hauptscheitel, jede transcendente unendlich viele. Sie liegen auf zwei koncentrischen Kreisen um C, zwischen denen die Trochoide periodisch verläuft. Nur im Fall, wo P auf dem Umfang des Kreises (r) liegt, arten die auf dem einen dieser beiden koncentrischen Kreise liegenden Scheitel in Rückkehrpunkte aus, die auf dem

---

p. 235—238; ebenda 6 (1899), p. 11—12; Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 235—259. Die Epicykloiden (siehe Nr. 5), die gewiss im Altertum schon bekannt waren (vgl. die Epicykeln des Ptolemäischen Weltsystems), kommen in einem speziellen Fall bei *A. Dürer* 1525 vor, dann bei *Desargues, De la Hire,* wo sie auch so genannt werden, *Euler* u. s. w.

6) Rotiert ein Punkt P gleichförmig um einen Punkt U, der seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt C rotiert, so beschreibt er eine Trochoide. Siehe *G. J. Verdam,* Arch. Math. Phys. (1) 11 (1848), p. 18—20. Vgl. Nr. 4.

7) *W. Zehme,* Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cykloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854, insbes. p. 16.

8) Siehe IV 3, p. 211, Fussnote 88, ausserdem: *Ch. Bresse,* J. éc. pol. cah. 35 (1853), p. 89—115, insbes. p. 99.

9) Der Scheitelkreis und die Centrale CM bilden zusammen eine durch die imaginären Kreispunkte gehende Kurve dritter Ordnung. Diese Kurve für den Fall beliebiger Polkurven bei *L. Burmester,* Civiling. 23 (1877), p. 227—250, insbes. p. 241. Vgl. auch IV 3, Nr. 8.

Umfang des festen Kreises liegen und deren Tangenten Radien des festen Kreises sind. Die von C nach den Hauptscheiteln gehenden Geraden sind Symmetriegeraden der Trochoide (s. Fig. 1)[10]. Nicht

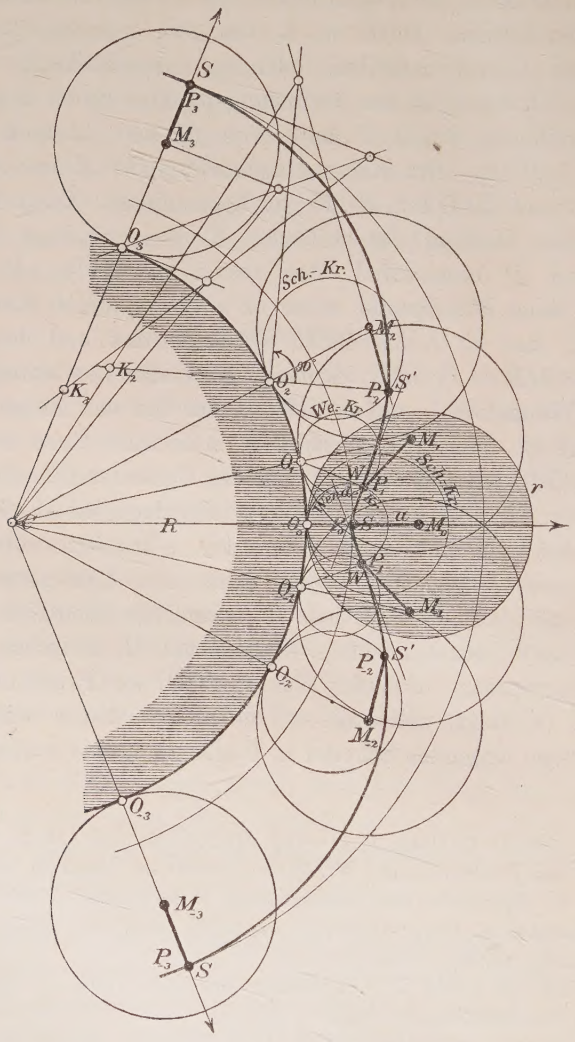

Fig. 1.

alle Trochoiden haben Nebenscheitel. Insbesondere giebt es Trochoiden, bei denen zwei Nebenscheitel in einen Hauptscheitel zusammenfallen, sodass der Krümmungskreis dort sechspunktig berührt.

10) Hierin sind die Wendepunkte mit W, die Hauptscheitel mit S, die Nebenscheitel mit S' bezeichnet. Zugleich ist angegeben, wie man zu einem

Die Bewegung werde von der Anfangslage (M_0, P_0, O_0) aus vorgenommen, bei der P_0 auf der Centralen CM_0 liegt und zwar in derjenigen der beiden möglichen Stellen, die näher bei O_0 ist, sodass $\overline{M_0P_0}$ und $\overline{M_0O_0}$ denselben Sinn haben. Beim Abrollen sei φ bezw. ψ der zum abgerollten Bogen des Kreises (R) bezw. (r) gehörige

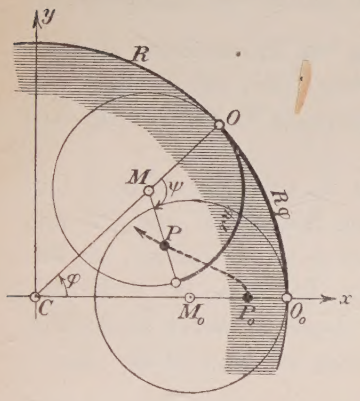

Fig. 2.

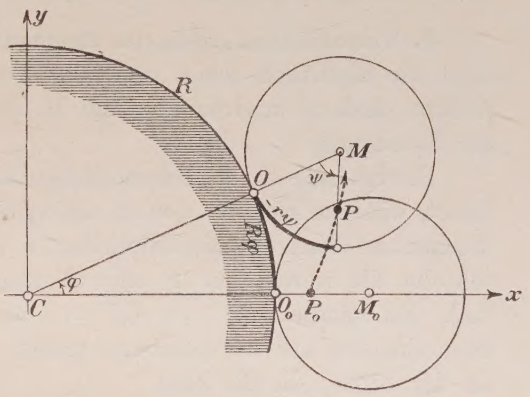

Fig. 3.

Centriwinkel, gemessen mit Vorzeichen unter Rücksicht auf den positiven Drehsinn der Ebene. Stets ist (vgl. Fig. 2 für $r > 0$, wobei $\psi < 0$, und Fig. 3 für $r < 0$, wobei $\psi > 0$ ist):

$$R\varphi = -r\psi \quad \text{oder} \quad \psi = -\frac{R}{r}\varphi.$$

Ist die Ebene die komplexe Zahlenebene[11]), C der Nullpunkt, CO_0 die positive reelle Axe, so gehört zur Mitte M die Zahl $(R - r)e^{i\varphi}$. Die Richtung von MP geht im Fall $r > 0$ durch die Drehung $\varphi + \psi$, im Falle $r < 0$ durch die Drehung $\varphi + \psi - \pi$ aus der Richtung CO_0 hervor, sodass, da $a \gtrless 0$ mit $r \gtrless 0$ ist, in jedem Falle zu P die Zahl

$$x + iy = (R - r)e^{i\varphi} + ae^{i(\varphi + \psi)}$$

oder

$$x + iy = (R - r)e^{i\varphi} + ae^{i\frac{r-R}{r}\varphi} \tag{1}$$

beliebigen Punkt (P_2) den Krümmungsmittelpunkt (K_2) findet und wie sich diese Konstruktion modifiziert, wenn der Kurvenpunkt (P_3) auf der zugehörigen Centralen (CM_3) gelegen ist (s. III D 1, 2, Nr. **17**). Dabei ist nur noch zu sagen, dass in O_3, M_3, P_3 Lote zur Centralen CP_3 gezogen werden, während die andere Gerade durch O_3 beliebig ist.

11) Die komplexe Zahlenebene (vgl. I A 4, p. 155) benutzt *E. Françoise*, Atti Istituto Venet. (4) 1 (1872), p. 430—436, *F. Morley*, Amer. J. of math. 16 (1894), p. 188—204, und *F. Schilling*, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 214—227.

gehört. Also sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = (R-r)\cos\varphi + a\cos\dfrac{r-R}{r}\varphi, \\ y = (R-r)\sin\varphi + a\sin\dfrac{r-R}{r}\varphi \end{cases}$$

die Gleichungen der Trochoide, ausgedrückt mittels des Parameters φ.

4. Verschiedene Arten der Erzeugung von Trochoiden. Aus (1) folgt die eigentlich schon von *G. J. Verdam*` 1848, vgl. Anm. 6, bemerkte, alsdann ausdrücklich von *G. Bellermann* [12]) angegebene Art der Erzeugung:

Bewegt sich ein *Gelenkparallelogramm* so, dass eine Ecke C fest bleibt, während sich die beiden anliegenden Seiten CU und CV mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten α und β um C drehen, so beschreibt die vierte Ecke P eine allgemeine Trochoide [IV 3, Nr. **23**, **24**]. Ist nämlich $CU = u$, $CV = v$ und liegen u und v zu Anfang über einander auf der positiven reellen Axe, so liegt P zur Zeit t an der Stelle, die die Zahl

$$(3)\qquad x + iy = ue^{i\alpha t} + ve^{i\beta t}$$

darstellt. Setzt man t proportional φ, so lässt sich diese Gleichung mit (1) leicht identifizieren [13]).

Aber dies ist auf *zwei* Arten möglich: Entweder giebt man R, r, a die aus

$$R_1 - r_1 = u, \quad a_1 = v, \quad \frac{r_1}{r_1 - R_1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

folgenden Werte R_1, r_1, a_1 oder die aus

---

12) Epicykloiden und Hypocykloiden, Jenenser Diss., Berlin 1867. *G. Bellermann* betrachtet auch die durch Addition von analogen Gliedern zu den Gliedern in (1) hervorgehenden *Cykloiden höherer Ordnung*, die dann von *C. Eichler*, Hamburg math. Ges. Mitt. 2, 2 (Festschrift 1890), p. 92—105, durch gegliederte Polygone erzeugt worden sind, wobei die komplexe Zahlenebene benutzt wird. Vgl. auch *L. Raabe*, J. f. Math. 1 (1826), p. 289—301, wo die Hypothese des Ptolemäischen Weltsystems (Epicykeln) untersucht wird.

13) *E. Eckardt*, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 129—134, erzeugt die Epi- und Hypocykloiden (s. Nr. 5), indem er zwei Punkte auf einem Kreis mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten rotieren lässt. Die Verbindende beider Punkte umhüllt, wie analytisch gezeigt wird, die Kurve, der Berührungspunkt teilt die Verbindende im Verhältnis der Geschwindigkeiten. Dieselbe Erzeugung dann synthetisch bei *L. Kiepert*, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 129—146; für Trochoiden verallgemeinert bei *E. Eckardt*, a. a. O., ferner ebenda 18 (1873), p. 319—323. Siehe auch *J. Wolstenholme*, Lond. Math. Soc. Proc. 4 (April 1873), p. 321—327, der daraus die nachher zu besprechende doppelte Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden durch Rollen ableitet.

$$R_2 - r_2 = v, \quad a_2 = u, \quad \frac{r_2 - R_2}{r_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

folgenden Werte R_2, r_2, a_2. *Jede Trochoide kann also auf zwei Arten durch Abrollen eines Kreises auf einem festen Kreise erzeugt werden*[14]).

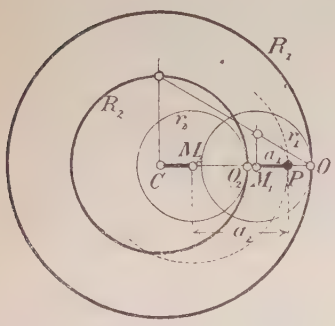

Fig. 4.

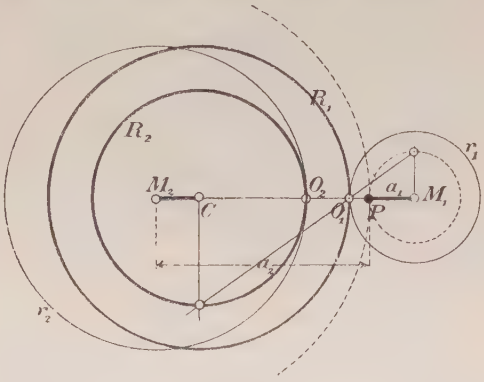

Fig. 5.

Kennt man die eine Art der Erzeugung, also etwa R_1, r_1, a_1, so liefern diese Formeln die Bestimmungsstücke der andern, nämlich:

$$(4) \quad R_2 = \frac{a_1}{r_1} R_1, \quad r_2 = \frac{a_1}{r_1}(R_1 - r_1) = R_2 - a_1, \quad a_2 = R_1 - r_1.$$

Diese Formeln geben sofort auch die Konstruktion der zweiten Erzeugung (s. Fig. 4 und 5). Bei beiden Erzeugungen haben die festen Kreise dieselbe Mitte C. Man kann zeigen, dass es sonst keine Erzeugung der Trochoide durch Rollen eines Kreises auf einem festen Kreise giebt[15]).

14) Die doppelte Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden (also, vgl. Nr. **5**, für $a_1 = r_1$, $a_2 = r_2$) bemerkten schon *De la Hire* und *Euler*; vgl. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 483. Der Satz über die doppelte Erzeugung der Trochoiden überhaupt bei *S. H. Gildemeister,* De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus, Diss. Marburg 1866; *G. Bellermann,* a. a. O. 1867; *Fouret,* Nouv. Ann. (2) 8 (1869), p. 162—168; *T. Rittershaus,* Verhandl. des Ver. zur Beförder. d. Gewerbfl. in Preussen 53 (1874), p. 269—300, insbes. Anm. auf p. 272, 273; *Proctor,* A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves, London 1878, p. 154—157; *A. Vietor,* Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 263—271; *Chr. Wiener,* ebenda 26 (1881), p. 257—263; *F. Morley* und *F. Schilling,* vgl. Anm. 11. *Morley* stellt deshalb die Erzeugung der Trochoiden durch Gelenkparallelogramme an die Spitze, weil sie eindeutig ist, während die beiden Erzeugungen der Trochoiden als Rollkurven mit einander gleichberechtigt sind. Vgl. IV 3, Nr. **23**.

15) Modelle der Trochoiden, die die doppelte Erzeugung zeigen, hat *L. Burmester*, Katalog math. Modelle, München 1892, p. 335, und *F. Schilling* (Verlag von M. Schilling, Halle a. S., vgl. auch die in Anm. 11 angegebene Arbeit) hergestellt.

5. Einteilung der Trochoiden, Epi- und Hypocykloiden. Liegt P bei der Erzeugung (R_1, r_1, a_1) im Innern des rollenden Kreises (r_1), sodass $a_1 : r_1 < 1$ ist, so liegt P bei der andern Erzeugung (R_2, r_2, a_2) ausserhalb des rollenden Kreises (r_2), da dann $a_2 : r_2 > 1$ ist. Diese verschiedenen Lagen von P darf man daher zur Einteilung der Trochoiden *nicht* benutzen. Durchläuft P bei der einen Erzeugung eine *Epitrochoide*, d. h. ist $r_1 < 0$ und also auch $a_1 < 0$ oder $r_1 > R_1$ und also auch $a_1 > 0$, so ist $r_2 > R_2$ bezw. $r_2 < 0$, d. h. auch bei der zweiten Erzeugungsart ist die Kurve Epitrochoide zu nennen (vgl. Fig. 5). *Die Einteilung in Epi- und Hypotrochoiden bleibt daher bei der zweiten Erzeugung erhalten.* Ist im Fall der Epitrochoide $r_1 < 0$, d. h. liegt der feste Kreis (R_1) *nicht* im Innern des rollenden Kreises (r_1), so ist $r_2 > R_2$, d. h. der feste Kreis (R_2) liegt innerhalb des rollenden Kreises (r_2),[16]) was Fig. 5 bestätigt.

Liegen bei der einen Erzeugung der beschreibende Punkt P und die Mitte C des festen Kreises (R_1) beide innerhalb oder beide ausserhalb des rollenden Kreises, so gilt dasselbe von der zweiten Art der Erzeugung, und die Kurven heissen dann ihrer Gestalt wegen *verschlungene Trochoiden.* Im andern Fall heissen sie *geschweifte Trochoiden*[17]).

Liegt P bei der ersten Erzeugung auf dem Umfang des rollenden Kreises (r_1), d. h. ist $a_1 = r_1$, so ist auch $a_2 = r_2$, d. h. P liegt auch auf dem Umfang des zweiten rollenden Kreises. Dann heisst die Bahn von P eine *Cykloide.* In diesem Falle ist der feste Kreis bei beiden Erzeugungen derselbe und $r_1 + r_2 = R_1 = R_2$, also: Teilt man den Durchmesser AB eines festen Kreises durch einen Punkt P, konstruiert dann über jeden Teil PA und PB als Durchmesser einen Kreis und denkt sich P mit dem einen oder andern Kreis fest verbunden, so beschreibt P beim Abrollen des betreffenden Kreises auf dem festen Kreise beide Male dieselbe *Cykloide.* Die Cykloiden heissen wieder *Epi- oder Hypocykloiden,* je nachdem der rollende Kreis ausser-

---

16) Es ist deshalb unlogisch, in dem Falle, wo der rollende Kreis den festen Kreis einschliesst, die Bahnkurven der Punkte des Umfanges des rollenden Kreises *Pericykloiden* zu nennen, wie es z. B. *H. Weissenborn* in der Monographie: Die cyklischen Kurven methodisch und mit besonderer Rücksicht auf Konstruktionen u. s. w., Eisenach 1856, p. 2, 3, thut. Doch beachte man seine Rechtfertigung in seiner Fussnote zu p. 3. Andere Autoren geben ebenfalls den Kurven mannigfache Beinamen, die häufig durch die zweite Erzeugung in ihr Gegenteil verwandelt werden.

17) So bei *Chr. Wiener* a. a. O., p. 263. *F. Schilling* a. a. O., p. 222, sagt *gestreckt* statt geschweift.

halb oder innerhalb des festen liegt. Ist also P äusserer oder innerer Teilpunkt von AB, so ist die Rollkurve von P eine Epi- bezw. Hypocykloide (s. Fig. 6 und 7)[18]).

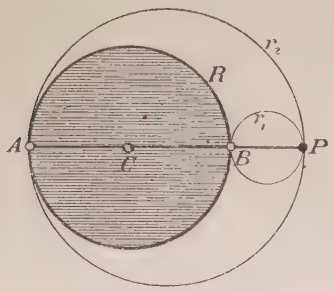

Fig. 6.

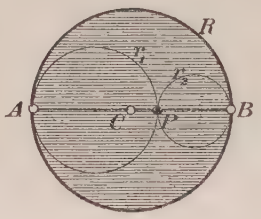

Fig. 7.

6. Gemeine Cykloiden, Kreisevolventen und archimedische Spiralen. *Rollt ein Kreis* (r) *auf einer Geraden* $(R = \infty)$ *ab*, so haben die Rollkurven *keine* zweite Erzeugung durch Rollen von Kreis oder Gerade auf Kreis oder Gerade. Die Rollkurven der Punkte, die auf dem Umfange des rollenden Kreises liegen, heissen dann *gemeine Cykloiden*[19]), die übrigen Rollkurven *verschlungene oder geschweifte Cykloiden*[20]), je nachdem der beschreibende Punkt ausserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises liegt. Da jetzt $R = \infty$ zu setzen ist, gelten die Formeln (2) nicht mehr. Ist die x-Axe die feste Polbahn, r der Radius des rollenden Kreises, a der Abstand des beschreibenden Punktes P von der Mitte M von (r), wo jetzt r und a beide *positiv* sein sollen, so werde die Anfangslage (M_0, P_0, O_0) so gewählt, dass der Drehpol O_0 der Anfangspunkt des Axenkreuzes ist, M_0 auf der positiven y-Axe liegt und P_0 die Ordinate $r - a$ hat. Ist der zum Centriwinkel ψ gehörige Bogen des Kreises (r) abgerollt, so sei ψ positiv gerechnet,

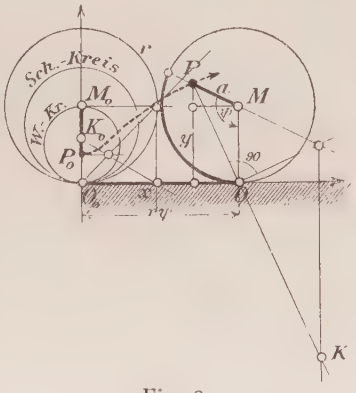

Fig. 8.

18) Die Trochoiden heissen bei manchen Autoren auch verallgemeinerte Cykloiden oder cyklische Kurven u. dgl., ja auch schlechtweg Cykloiden.

19) Bezüglich der älteren Geschichte der gemeinen Cykloiden siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 460—462. Ihr Name rührt von *G. Galilei* her.

20) Auch *verlängerte* und *verkürzte* Cykloiden.

wenn das Abrollen auf der positiven x-Axe stattfindet. Dann hat P die Koordinaten (s. Fig. 8)[21]:

$$x = r\psi - a\sin\psi, \quad y = r - a\cos\psi. \tag{5}$$

Dies sind die mittels des Parameters ψ ausgedrückten Gleichungen der verschlungenen Cykloide für $a > r$, der gemeinen für $a = r$, der geschweiften für $a < r$. Für die gemeine Cykloide giebt $\psi = 2\pi r k$ (k eine ganze Zahl) die *Rückkehrpunkte*, für die sonstigen Kurven giebt $\psi = \pi r k$ die *Hauptscheitel*, die auf zwei Parallelen zur x-Axe liegen. Der Punkt P ist ein Wendepunkt seiner Bahn, wenn er auf den *Wendekreis* zu liegen kommt, d. h. auf den Kreis vom Radius $\frac{1}{2}r$, der innerhalb des rollenden Kreises liegt und ihn im momentanen Drehpol O berührt. Er wird dagegen ein *Nebenscheitel*, wenn er auf den ebenso liegenden Kreis vom Radius $\frac{3}{4}r$ rückt[22].

Rollt eine Gerade ($r = \infty$) *auf einem festen Kreise* (R) *ab*, so beschreiben ihre Punkte *eigentliche Evolventen* [III D 1, 2, Nr. **16**] *des festen Kreises*, die sonstigen mit ihr fest verbundenen Punkte *verschlungene oder geschweifte Kreisevolventen*, je nachdem sie auf derselben Seite der Geraden liegen wie die Mitte C des festen Kreises oder nicht. Auf die analytische Darstellung, die dann auch nicht mehr die Form (2) hat, gehen wir

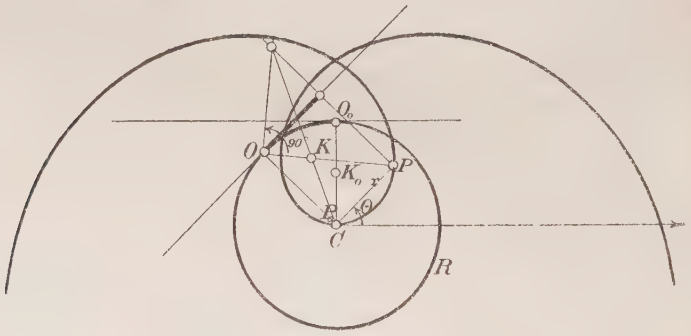

Fig. 9.

nicht ein. Insbesondere beschreiben diejenigen Punkte, die mit der Geraden fest verbunden sind, auf derselben Seite von ihr wie C liegen und den Abstand R von ihr haben, *archimedische Spiralen*[23]. Jeder

21) In dieser Figur ist zugleich die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K_0 bezw. K für die Punkte P_0 bezw. P angegeben.

22) Scheitel- und Wendekreisradius gehen aus den in Nr. **3** angegebenen Radien für $R = \infty$ hervor. Der Scheitelkreis ist z. B. bei *Chr. Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2, Leipzig 1887, p. 357 erwähnt.

23) *Al. Cl. Clairaut*, Paris Mém. 1740 [1742].

solche Punkt rückt nämlich im Laufe der Bewegung einmal in die Mitte C. Nehmen wir diese Lage zur Anfangslage und benutzen die Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ mit dem Pol O, sodass die Anfangslage der Geraden die Tangente des festen Kreises im Punkte $(\mathfrak{r} = R,\ \theta = \frac{1}{2}\pi)$ ist, so beschreibt der zu Anfang in C liegende Punkt P die Kurve (s. Fig. 9[24]):

$$\mathfrak{r} = R\theta \qquad (R = \text{const.}),$$

und dies ist die Definitionsgleichung der archimedischen Spiralen[25]).

7. Rektifikation der Epi- und Hypocykloiden. Während die Rektifikation [III D 1, 2, Nr. **10**] der Trochoiden im allgemeinen auf elliptische Integrale führt, ist sie im Fall der Cykloiden $(a = r)$ elementar. Nach (2), Nr. **3**, sind:

24) Hierin ist wieder die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K für P angegeben. P_0 hat seinen Krümmungsmittelpunkt K_0 in der Mitte von $P_0 O_0$. — Hier sei noch angemerkt, dass die *Spirale von Sturm oder Norwich*, deren Krümmungsradius gleich ihrem Radiusvektor ist, eine Evolvente einer Kreisevolvente ist, vgl. *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 532, 533. Diese Spirale hat übrigens eine charakteristische Eigenschaft, die bei *Loria* nicht erwähnt zu sein scheint: Ihre Bogenlänge stimmt mit der Bogenlänge ihrer Fusspunktkurve überein, wenn der Anfangspunkt der Pol der Fusspunkttransformation ist. *J. Sylvester* nennt die höheren eigentlichen Kreisevolventen *Cykloden* (Lond. math. Soc. Proc. 2 (1869), p. 137—160).

25) Geschichtliches über die archimedischen Spiralen bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 426—433. Ihre Entdeckung wird *Archimedes* zugeschrieben. Alle archimedischen Spiralen sind einander ähnlich. (Dasselbe gilt von allen eigentlichen Kreisevolventen.) Jede archimedische Spirale hat *zwei* von C ausgehende symmetrische Zweige, siehe *L. Euler*, Introductio in analysin infinitorum 1, Lausannae 1748, tab. 27, fig. 109, und 2, p. 301—302. *Archimedes* selbst hat die Tangente bestimmt und die Quadratur ausgeführt. Ihre Rektifikation wurde von *Cavalieri, St. Vincentius, Roberval, Pascal* und *Fermat* geleistet, nämlich auf die der Parabel $y^2 = 2Rx$ zurückgeführt. Mit der archimedischen Spirale ist die *Neoide* identisch (vgl. *F. Stegmann*, Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 53, 54), denn die Gleichung der Neoide: $\mathfrak{r} = a\theta + b$ kann durch andere Wahl des Anfangsstrahls auf die Form $\mathfrak{r} = a\theta$ gebracht werden. Wenn man also alle Radienvektoren der archimedischen Spirale um dasselbe Stück verlängert, so ergiebt sich eine kongruente, aber gedrehte archimedische Spirale. Der Krümmungsmittelpunkt wurde mittels der projektiven Geometrie von *W. Rulf*, ebenda (2) 11 (1892), p. 197—199, abgeleitet. Eine Minimaleigenschaft der Kurve bei *E. Janisch*, ebenda (2) 9 (1890), p. 445—448. Wählt man nämlich in der Ebene drei feste Punkte Π_1, Π_2, V und zwei feste Geraden π_1 und π_2 durch Π_1 bezw. Π_2, so geht die Fusspunktkurve C einer Kurve Γ, die Π_1 und Π_2 zu Punkten und π_1 und π_2 daselbst zu Tangenten hat, durch die Fusspunkte P_1 und P_2 der Lote von V auf π_1 und π_2, wenn V der Pol der Fusspunkttransformation ist. Für eine Kurve Γ der bezeichneten Art ist nun die von C, Γ, π_1 und π_2 begrenzte Fläche ein Minimum, wenn C eine archimedische Spirale ist, die V zum Pol hat.

$$(6)\qquad \begin{cases} x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{r-R}{r}\varphi, \\ y = (R-r)\sin\varphi + r\sin\dfrac{r-R}{r}\varphi \end{cases}$$

die Gleichungen der Cykloide. Hieraus folgt für das Bogenelement ds:

$$ds = \pm\, 2(R-r)\sin\frac{R}{2r}\varphi\cdot d\varphi,$$

also, wenn die Bogenlänge s von $\varphi = 0$ an gerechnet wird:

$$s = \pm\,\frac{4r(R-r)}{R}\left(1-\cos\frac{R}{2r}\varphi\right).$$

Wird $R\varphi = \pm\, r\pi$ gesetzt, so ergiebt sich die Länge eines halben Cykloidenbogens, nämlich vom Rückkehrpunkt ($\varphi = 0$) bis zum nächsten Hauptscheitel. Daher ist die Länge eines Bogens zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten [26])

$$\pm\,\frac{8r}{R}(R-r).$$

Rollt ein Kreis vom absolut gemessenen Radius r einmal auf der einen, das andere Mal auf der andern Seite des festen Kreises (R) ab, indem von solchen Lagen ausgegangen wird, in denen beide rollende Kreise einander berühren und alsdann dieser Berührungspunkt als beschreibender Punkt gewählt wird, so ergeben sich zwei Cykloiden, die gemeinsame Rückkehrpunkte haben. Dabei ist die Summe der Bogen beider zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten gleich $16r$, also von R unabhängig [27]).

8. Natürliche Gleichung der Cykloiden, cykloidale Kurven. Das Quadrat des Krümmungsradius ϱ der Cykloide (6), ausgedrückt durch die von einem Hauptscheitel an gerechnete Bogenlänge s, hat den Wert:

$$(7)\qquad \varrho^2 = \frac{16r^2(R-r)^2}{(2r-R)^2}\left[1-\frac{R^2}{16r^2(R-r)^2}s^2\right].$$

Die Cykloiden haben also eine natürliche Gleichung (vgl. III D 1, 2, Nr. **15**) von der Form [28]):

$$(8)\qquad \frac{s^2}{m^2}+\frac{\varrho^2}{n^2} = 1,$$

26) *De la Hire,* Paris Mém. 9 (1694), p. 234 u. 239. Näheres über die Rektifikation und Quadratur der Trochoiden überhaupt bei *C. Eichler,* vgl. Anm. 12, und *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 466, 467, 469—471, 475—477, 489, 490. Ebenso dort näheres über diejenigen *algebraischen* Cykloiden, die besonderes Interesse haben.

27) *R. Hennig,* J. f. Math. 65 (1866), p. 52—61, bemerkt, dass diese Unabhängigkeit von der Polbahn auch dann statthat, wenn die Polbahn eine beliebige Kurve ist.

28) *L. Aoust,* Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris 1873, p. 99.

wo:

$$(9) \qquad m^2 = \frac{16r^2(R-r)^2}{R^2}, \quad n^2 = \frac{16r^2(R-r)^2}{(2r-R)^2}$$

ist. Umgekehrt: Die natürliche Gleichung (8) stellt eine Epi- oder Hypocykloide dar, bei der die Radien der Kreise sind:

$$(10) \qquad R = \frac{mn^2}{n^2-m^2}, \quad r = \frac{mn}{2(n-m)},$$

wobei m mit demjenigen Vorzeichen zu wählen ist, für das $R > 0$ wird, und wobei wieder die doppelte Erzeugung hervortritt, da n durch $-n$ ersetzt werden kann.

Die Kurven dagegen, deren natürliche Gleichung ist:

$$(11) \qquad \frac{s^2}{A} + \frac{\varrho^2}{B} = 1,$$

wo die Konstanten A und B nicht beide positiv sind, lassen sich *nicht* durch Abrollen eines reellen Kreises auf einem reellen Kreis erzeugen. *E. Cesàro*[29]) nennt sie *cykloidale Kurven*, insbesondere *Pseudocykloiden*[30]), wenn $A + B = 0$ ist. Unter ihnen sind *reelle* Kurven vorhanden, die also als Cykloiden aufgefasst werden können, bei denen der eine oder beide Kreise imaginär sind. Von *E. Wölffing* ist die Frage nach allen derartigen Kurven methodisch behandelt worden[31]). Auf zwei spezielle, die *Paracykloide* und *Hypercykloide* von *R. de Saussure*, kommen wir in Nr. **12** zurück.

9. Mit den Cykloiden zusammenhängende Kurven, insbes. Rhodoneen. Beschreibt P eine Cykloide, d. h. liegt P auf dem Umfang des Kreises (r), der auf dem festen Kreise (R) rollt, so liegt

---

29) *E. Cesàro*, Natürliche Geometrie, p. 58, wo er die Gleichung (11), indem er den Anfangspunkt der Bogenlänge beliebig wählt, so schreibt:

$$\varrho^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma.$$

Ist insbesondere $\beta^2 = \alpha\gamma$, so ist die Zurückführung auf die Form (11) nicht mehr möglich. Dann gehen die *logarithmischen Spiralen* (s. Nr. **16**) hervor. Ist $\alpha = 0$, so ist die Kurve eine *eigentliche Kreisevolvente* (Nr. **6**).

30) Ebenda p. 10, 11.

31) Wenn bei einer stetigen ebenen Bewegung *zwei* Punkte reelle Bahnen beschreiben, so beschreiben alle mit ihnen starr verbundenen reellen Punkte reelle Bahnen, auch ist dann der Drehpol stets reell, daher auch Polbahn und Polkurve. Sind diese beiden nicht reell, so kann der Fall eintreten, dass gerade und nur *ein* Punkt eine reelle Bahn beschreibt. Bei *E. Wölffing*, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 139—166, findet man auch Geschichtliches über das frühere Auftreten solcher Kurven, deren Charakter als Trochoiden man nicht erkannte, bei *Euler* u. A. Siehe auch *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 504—508, wo noch eine der Mechanik entstammende spezielle cykloidale Curve, die *Ephelix* von *F. Roth* (Repertorium d. Phys. 23 (1887)), p. 1, 457, 553, erwähnt wird.

der Krümmungsmittelpunkt K von P auf einem Kreise, der den festen Kreis ebenfalls im momentanen Drehpol O berührt und den Radius

$$r' = \frac{Rr}{2r - R}$$

hat, wobei das Vorzeichen dieselbe Bedeutung wie oben (in Nr. 3) hat. Konstruieren wir den zum festen Kreis (R) konzentrischen Kreis (R'), der den Kreis (r') ebenfalls berührt, dessen Radius also ist:

$$R' = \pm (R - 2r') = \frac{\pm R^2}{2r - R},$$

so ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$r' : R' = r : R.$$

Rollt der Kreis (r) auf dem Kreis (R) ab, so rollt zugleich der Kreis (r') ohne Gleiten auf dem Kreis (R') ab, woraus der Satz von *Jac. Bernoulli* und *De la Hire*[32]) folgt, *dass die Evolute einer Epi- oder Hypocykloide eine ihr ähnliche Kurve ist*, wobei jedoch entsprechende Punkte nicht homolog sind. Für allgemeine Trochoiden gilt aber *kein* analoger Satz[33]). Die Evolute einer gemeinen Cykloide insbesondere ist eine mit der Cykloide kongruente Kurve. In diesem Falle wird der Krümmungsradius ϱ vom momentanen Drehpol O halbiert[34]).

Die *Fusspunktkurven* [III D 1, 2, Nr. 7] *der Cykloiden*[35]) in Bezug auf die Mitte C des festen Kreises haben in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{r} = a \cos b\theta;$$

solche Kurven heissen *Rhodoneen*[36]). Auch unter den Trochoiden

32) *Jac. I Bernoulli*, Acta Erud. 1692, p. 291f.; *De la Hire*, Paris Mém. 9 (1694), p. 221—294, insb. p. 265.

33) Ihre Evoluten wurden von *S. H. Gildemeister*, a. a. O., *G. Bellermann*, a. a. O. (siehe Fussnote 14), und *Chr. Wiener*, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 129—139, untersucht.

34) *Jede* ebene Kurve, deren Krümmungsradius von einer festen Geraden halbiert wird, ist eine gemeine Cykloide. Man sehe z. B. *E. Cesàro*, Natürl. Geometrie, p. 26.

35) Siehe *G. Bellavitis*, Ann. fis. mat. 3 (1852), p. 508—516; *E. Eckardt*, Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 129—134, insbes. p. 132, und *L. Kiepert*, ebenda 17 (1872), p. 129—146, insbes. p. 143. Hier wird ihre Rektifikation und Quadratur ausgeführt. Fusspunktkurven mit allgemeiner gewähltem Pol bei *W. M. Hicks*, Mess. of Math. (2) 6 (1876), p. 94—96.

36) Die *Rhodoneen* (*Rosenkurven, Rosaces*) rühren von *G. Grandi* her, es wurden hauptsächlich nur algebraische betrachtet. Vgl. *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 297—306. Die Bahn eines Punktes, der längs einer Geraden um einen ihrer Punkte schwingt, während die Gerade um letzteren Punkt gleichmässig rotiert, ist eine Rhodonee. Siehe *E. Auth*, Marburger Diss. 1866. Aus den Rhodoneen gehen vermöge Transformation durch reziproke Radien die *Ährenkurven* oder *Cotes'schen Spiralen* hervor, siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 305.

selbst sind Rhodoneen vorhanden, nämlich diejenigen Trochoiden, bei denen $a = \pm (R - r)$ ist, die also durch die Mitte des festen Kreises gehen. In der That[37]), im Fall $a = R - r$ hat die Kurve (2), Nr. 3, in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = 2(R - r) \cos \frac{R}{2r - R} \theta,$$

im Falle $a = r - R$ die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = 2(R - r) \sin \frac{R}{2r - R} \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$[38])

10. Rollkurven mit geradliniger Polbahn. Rollt eine Kurve auf einer Geraden ab, so gestalten sich die Formeln nach einer Bemerkung von *R. de Saussure*[39]) besonders bequem, wenn man für die rollende Polkurve die natürlichen Koordinaten, d. h. Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ, für die Rollkurven dagegen rechtwinklige Koordinaten x, y benutzt, wobei die geradlinige Polbahn die x-Axe und zu Anfang der Bewegung (für $s = 0$) der Drehpol der Anfangspunkt sei. Ist nämlich das Bogenstück s der Polkurve:

$$\varrho = \varphi(s)$$

auf der x-Axe abgerollt, und wird das Abrollen um das Element ds weiter fortgesetzt, sodass weiterhin um den Kontingenzwinkel $ds : \varrho$ der Polkurve gedreht wird, so ändern sich die Koordinaten x, y eines mit der Polkurve fest verbundenen Punktes um Elemente dx, dy, für die sich aus einer Figur sofort ergiebt:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{s - x} = \frac{ds}{\varrho}. \tag{12}$$

Ist die Polkurve $\varrho = \varphi(s)$ gegeben, so folgt hieraus:

$$\frac{d(x \pm iy)}{ds} = \mp \frac{i}{\varrho}(x \pm iy) \pm i \frac{s}{\varrho},$$

37) Dass jede Rhodonee eine Trochoide ist, bewies *L. Ridolfi*, Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse, Florenz 1844, p. 11. Vgl. *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 495. Spätere Arbeiten über Rhodoneen: *H. Durège*, Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 209—217; *A. Himstedt*, Progr. Progymnasium Löbau (W.-Pr.) 1888; *A. Aubry*, J. de math. spéc. (4) 2 (1893), p. 172—178.

38) Auf die sonstigen Kurven, die mit den Trochoiden zusammenhängen, wie z. B. ihre Polarkurven hinsichtlich des festen Kreises, gehen wir nicht ein, ebenso wenig auf die Bedeutung der Trochoiden, insbesondere Cykloiden, für die Mechanik und als Brennkurven. Man vgl. hierüber *E. Wölffing*, Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 235—259.

39) Amer. J. of math. 17 (1895), p. 269—272. Eine andere Behandlung des Problems bei *A. Demoulin*, Bruxelles Mém. cour. 45, 7 mars 1891.

d. h. die Rollkurven ergeben sich durch Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, also durch Quadraturen (vgl. II A 4b, Nr. **22**). Ist dagegen eine Rollkurve $y = f(x)$ gegeben, so liefert (12):

$$s = x + y\frac{dy}{dx}, \qquad \varrho = y\frac{ds}{dx}; \tag{13}$$

die erste Formel giebt s, darauf die zweite ϱ als Funktion von x. Es geht also die natürliche Gleichung der Polkurve durch Elimination hervor. Wir betrachten in Nr. **11** und **12** einige besondere Fälle.

11. Kurven von Delaunay und Sturm. Rollt eine Ellipse oder Hyperbel auf einer Geraden, so beschreiben ihre Brennpunkte Kurven, die *Delaunay'sche Kurven* heissen[40]). *Ch. Delaunay*[41]) hat nämlich bewiesen [III D 5, Nr. **36**]: Um die Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung $1 : 2a$ zu finden, lasse man eine Ellipse oder Hyperbel, deren Hauptaxe gleich $2a$ ist, auf der Geraden rollen. Jeder ihrer Brennpunkte beschreibt die gesuchte Kurve. Durch Umdrehen der Kurve um die Gerade geht die gewünschte Rotationsfläche hervor. Wegen des bekannten Satzes über die Hauptkrümmungsradien einer Rotationsfläche [III D 5, Nr. **4**] bedeutet dies, dass bei einer *Delaunay'schen Kurve die Summe der reziproken Werte des Krümmungsradius und der bis zur Axe gemessenen Normalen konstant* (gleich $1 : a$) ist. *O. Bonnet*[42]) fügte hinzu: Rollt eine Parabel auf der Geraden ab, so beschreibt ihr Brennpunkt die *Kettenlinie* (s. Nr. **27**); die zugehörige Fläche ist das Katenoid. In der That ist bei der Kettenlinie der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich der Normalen, gemessen bis zur Axe. *Ch. Sturm*[43]) untersuchte die Rollkurve der Mitte eines Kegelschnittes beim Abrollen auf der Geraden und bemerkte, dass sie im Fall der gleichseitigen Hyperbel eine *spezielle elastische Linie* (s. Nr. **37**) ist[44]). *S. Spitzer*[45]) zeigte, dass die Bogenlänge der *Delaunay*'schen Kurve bei einmaligem Abrollen einer Ellipse gleich dem Umfang des Kreises ist, der die grosse Axe der Ellipse zum Durchmesser hat. Die Rollkurven beliebiger mit dem abrollenden Kegelschnitt fest verbundener

40) Nach einem Vorschlag von *P. Mansion*, siehe *E. Habich*, Mathesis 6 (1886), p. 103—106. Sie heissen auch *elliptische* bezw. *hyperbolische Kettenlinien*.

41) J. de math. (1) 6 (1841), p. 309—315. Unter mittlerer Krümmung versteht dabei *Delaunay* die *halbe* Summe der beiden Hauptkrümmungen [III D 1, 2, Nr. **35**.]

42) Ebenda (1) 9 (1844), p. 97—112, insbes. p. 104.

43) Ebenda (1) 6 (1841), p. 315—320, insbes. p. 318, 319.

44) Siehe auch *H. Brocard*, Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 432, und *Moret-Blanc*, ebenda (2) 12 (1873), p. 451—453.

45) Archiv Math. Phys. (1) 48 (1868), p. 235—238.

Punkte wurden teils speziell, teils allgemein von mehreren untersucht[46]) [47]).

12. Para- und Hypercykloiden. Es rolle eine Polkurve auf der Geraden (x-Axe) ab. Dabei beschreibe ein mit ihr fest verbundener Punkt eine Gerade:

$$y = \alpha x + a.$$

Die natürliche Gleichung der Polkurve geht dann aus (13) in der Form:

$$\varrho - \alpha s - a = 0$$

hervor, die zeigt, dass die Polkurve eine *logarithmische Spirale* (s. Nr. **16**), insbesondere für $\alpha = 0$ ein Kreis, ist[47a]).

Soll dagegen ein Punkt beim Abrollen der Polkurve auf der Geraden (x-Axe) einen Kegelschnitt beschreiben[48]), der die Gerade zur Axe hat, sodass

---

46) Z. B. von *H. Brocard,* Nouv. Corresp. de math. 3 (1877), p. 6—13, 33—40; *A. V. Lane,* Amer. J. of math. 8 (1886), p. 132—137; *H. Ekama,* Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 388—441.

47) Man kann auch die Kurve suchen, die eine mit der abrollenden Polbahn fest verbundene Kurve umhüllt, z. B. wenn ein Kreis auf einem Kreis abrollt, so umhüllt auch jeder Durchmesser eine *Cykloide,* nach *M. Chasles,* Aperçu historique etc., Brüssel 1837, 2. Aufl. Paris 1875, p. 69. Ist die Polkurve eine Parabel, so umhüllt ihre Leitlinie eine *Kettenlinie* (Nr. **27**), siehe z. B. *E. Cesàro,* Natürliche Geom., p. 94. — Ferner: Rollt eine *Epi- oder Hypocykloide* auf der Geraden ab, so beschreibt die mit ihr fest verbunden gedachte Mitte des ursprünglich festen Kreises eine Ellipse (das Abrollen ist hier eine Art von Hin- und Herpendeln auf *beiden* Seiten einer Strecke); die Ellipse wird im Fall der *Kreisevolvente* (Nr. **6**) zur Parabel. Vgl. *O. Böklen,* Archiv Math. Phys. (1) 37 (1861), p. 118—123, insbes. p. 121; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 84, 85. Die Bahnkurve des Pols einer auf einer Geraden rollenden *Sinusspirale* (s. Nr. **21**) wurde von *O. Bonnet,* J. de math. (1) 9 (1844), p. 97—112, insbes. p. 103, untersucht. Sie ist eine *Ribaucour'sche Kurve* (s. Nr. **26**). Vgl. auch *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159; *A. Ribaucour,* Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 1881, insbes. p. 158; *J. McMahon,* Educ. Times 50 (1889), p. 169, 170; *A. Demoulin,* Bruxelles Mém. cour. in 8°, 44 (7 mars 1891); *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 85, *E. Wölffing,* Biblioth. math. (3) 2 (1901), p. 235—259. Rollt eine Ribaucour'sche Kurve auf einer Geraden ab, so umhüllt ihre Direktrix wieder eine Ribaucour'sche Kurve, vgl. *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 84. — Die Kurve, auf der eine Hyperbel abrollen muss, damit ihre Mitte eine Gerade beschreibe, ist die *Sprungseilkurve* (courbe à sauter), nämlich die Kurve eines schweren homogenen unausdehnbaren, aber biegsamen Fadens, der um eine horizontale Axe mit festgehaltenen Enden rotiert. Siehe *P. Appell et E. Lacour,* Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1897, p. 188, u. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 513.

47a) Siehe z. B. *E. Catalan,* Anm. 3.

48) *R. de Saussure,* Anm. 39.

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$$

die Gleichung der Rollkurve ist, so folgt aus (13) für die Polkurve die natürliche Gleichung:

$$\frac{s^2}{\alpha} + \frac{\varrho^2}{\beta} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right)^2,$$

die zeigt, dass die Polkurve eine *cykloidale Kurve* (s. Nr. 8) ist, indem hier

$$m^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha}, \quad n^2 = \frac{\beta(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2}$$

die Grössen (9) sind, sodass nach (10):

$$R = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}, \quad r = \frac{(\alpha - \beta)\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}$$

die Radien der erzeugenden Kreise sind. Nur wenn $\alpha > 0$, $\beta > 0$, die Rollkurve also eine Ellipse ist, ist die Polkurve eine Cykloide, die durch Rollen eines reellen Kreises auf einem reellen Kreis entsteht.

Ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, d. h. die Rollkurve eine Hyperbel und die Polbahn ihre grosse Axe, so ist r imaginär. Die somit auf imaginärem Wege als Cykloide erzeugbare reelle Polkurve heisst nach *R. de Saussure* eine *Paracykloide.* Im Falle $\alpha < 0$, $\beta > 0$ dagegen nennt er die Polkurve *Hypercykloide*; in diesem Fall ist die Rollkurve eine Hyperbel und die Polbahn ihre Nebenaxe und R und r werden imaginär.

Ist die Rollkurve eine Parabel und die Polbahn ihre Axe, so ist die Polkurve eine *Kreisevolvente*[49]). Vgl. Anm. 29.

II. *W*-Kurven.

13. Definition der *W*-Kurven. *F. Klein* und *S. Lie* haben 1870/71 in gemeinsamen Arbeiten[50]) eine Familie von im allgemeinen

49) Wir nennen noch einige Arbeiten über das Abrollen transcendenter Kurven: Abrollen von Cykloiden auf Cykloiden bei *G. Bellermann,* Berlin Königstädt. Realschule Jubil.-Schrift 1882, p. 215—240; *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159; Abrollen von Sinusspiralen oder Ribaucourschen Kurven auf Sinusspiralen bei *Hâton de la Goupillière,* Nouv. Ann. (2) 15 (1876), p. 97—108, insbes. p. 103; *A. Mannheim,* a. a. O.; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., p. 95. Ferner über Abrollen von Kegelschnitten auf Kegelschnitten bei *A. Miquel,* J. de math. (1) 3 (1838), p. 202—208; *E. Hartmann,* Progr. Kassel 1876; *H. Ekama,* Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 388—441. Endlich sei noch erwähnt: *E. Habich* a. a. O.; *E. Cesàro* a. a. O. p. 86, 91.

50) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Paris, C.R. 70 (1870), p. 1222—1226, 1275—1279; Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen

transcendenten Kurven untersucht, die zwar gelegentlich schon früher vorkamen[51]), bei denen aber der innere Grund für ihre merkwürdigen Eigenschaften erst durch die Genannten aufgedeckt wurde. Zur Definition gehen wir von einer *infinitesimalen projektiven Transformation* der Ebene aus [II A 6, Nr. 4]. Sie erzeugt, unendlich oft ausgeführt, eine in *Lie*'s Sinne *kontinuierliche eingliedrige projektive Gruppe* $\mathfrak{G}_1$ [II A 6, Nr. 2]. Übt man alle Transformationen der Gruppe auf irgend einen Punkt aus, so beschreibt er eine *Bahnkurve der Gruppe* $\mathfrak{G}_1$. *Diese Bahnkurven sind die W-Kurven der Ebene.* Die Definition der *W-Kurven im Raum* ist analog. Auf diese Kurven kommen wir in Nr. **20** kurz zurück. Jeder Punkt einer W-Kurve hat dieselbe Kurve zur Bahnkurve, sodass zur Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in der Ebene ∞^1 W-Kurven gehören. Jede dieser W-Kurven bleibt invariant bei allen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ [II A 6, Nr. **12**].

Sind x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten und erteilt die infinitesimale Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ihnen die Inkremente:

$$\delta x_i = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

wobei δt etwa das Zeitelement vorstellt, in dem die Transformation vor sich geht, so ist längs jeder W-Kurve der Gruppe $\mathfrak{G}_1$:

$$\frac{dx_1}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \frac{dx_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \frac{dx_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}. \tag{15}$$

Jede Integralkurve dieses Systems ist eine W-Kurve der Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Führt man nicht-homogene Koordinaten:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{16}$$

ein, so kommt statt (15):

$$\frac{dx}{a_{13} + (a_{11} - a_{33})x + a_{12}y - a_{31}x^2 - a_{32}xy} = \frac{dy}{a_{23} + a_{21}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{31}xy - a_{32}y^2}.$$

Dies ist die allgemeine Form einer *Jacobi'schen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung*[52]). Die W-Kurven sind also die Integralkurven derartiger Differentialgleichungen.

Führt man auf die Ebene eine beliebige projektive Transformation aus, d. h. bildet man sie perspektiv auf eine Ebene ab [III A 5, 6],

in sich übergehen, Math. Ann. 4 (1871), p. 50—84. Eine elementare Behandlung der ebenen W-Kurven bei *S. Lie*, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen u. s. w., bearb. von *G. Scheffers*, Leipzig 1893, p. 68—82. Sie heissen dort *selbstprojektive Kurven*, doch hat sich diese Bezeichnung nicht eingebürgert. Über den Namen W-Kurven siehe Anm. 58.

51) So bei *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 24 (1842), p. 1—4 = Werke 4, p. 257—262; *A. Clebsch* und *P. Gordan*, Math. Ann. 1 (1869), p. 359—400, insbes. p. 389. Nach *G. Loria* auch bei *G. Battaglini*, Napoli Atti 2 (1865).

52) Siehe *Jacobi* a. a. O. Vgl. auch II A 4b, p. 240.

so gehen die W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in die W-Kurven derjenigen Gruppe über, die aus $\mathfrak{G}_1$ durch Ausübung jener Transformation hervorgeht. Will man also typische Formen für die W-Kurven finden, so darf man dabei beliebig von projektiven Koordinatenänderungen Gebrauch machen.

14. Zwei Arten von transcendenten ebenen W-Kurven. Jede infinitesimale projektive Transformation der Ebene sowie die von ihr erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}_1$ lässt gewisse Punkte und Geraden in Ruhe. Es giebt fünf Möglichkeiten[53]). Bei zweien bleiben unendlich viele *Geraden* einzeln in Ruhe, die daher dann die W-Kurven sind. Bei einer erzeugt die infinitesimale Transformation eine eingliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_1$, deren Bahnkurven *Kegelschnitte* sind[54]). *Transcendente* W-Kurven können sich daher nur in den beiden übrigen Fällen ergeben. Diese sind:

Erster Fall: Bei $\mathfrak{G}_1$ bleiben die Ecken und Seiten eines (nicht ausgearteten) Dreiecks Δ und sonst keine Punkte und Geraden in Ruhe.

Zweiter Fall: Bei $\mathfrak{G}_1$ bleiben nur zwei Punkte und nur zwei Geraden in Ruhe, die Verbindende der beiden Punkte ist die eine Gerade, der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der eine Punkt.

Dementsprechend giebt es *zwei Arten von transcendenten ebenen W-Kurven*. Die der zweiten Art lassen sich durch einen Grenzübergang aus denen der ersten Art ableiten.

Wird im *ersten* Fall das invariante Dreieck Δ als Koordinatendreieck angenommen, so hat die Transformation (14) die Form:

$$\delta x_1 = a_1 x_1 \delta t, \quad \delta x_2 = a_2 x_2 \delta t, \quad \delta x_3 = a_3 x_3 \delta t \tag{17}$$
$$(a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0),$$

sodass statt (15) kommt:

$$\frac{dx_1}{a_1 x_1} = \frac{dx_2}{a_2 x_2} = \frac{dx_3}{a_3 x_3}.$$

Setzen wir alle drei Brüche gleich dt, so giebt Integration die Gleichungen der W-Kurven der ersten Art, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

$$x_1 = \text{const.}\, e^{a_1 t}, \quad x_2 = \text{const.}\, e^{a_2 t}, \quad x_3 = \text{const.}\, e^{a_3 t} \tag{18}$$

oder nicht-homogen nach (16):

$$x^{a_2 - a_3}\, y^{a_3 - a_1} = \text{const.} \tag{19}$$

Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der ersten Art können daher durch

---

53) Siehe z. B. *Lie-Scheffers*, a. a. O. p. 61—67. Vgl. *H. B. Newson*, Kansas Quart. 6 (1897), p. 63; 7 (1898), p. 125; 8 (1899), p. 43; 9 (1900), p. 65.

54) Ebenda p. 70.

eine geeignete projektive Transformation der Ebene in die ∞^1 *interscendenten höheren Parabeln*[55]):

$$y = \text{const. } x^m \tag{19'}$$

übergeführt werden. Hierin ist die Konstante m für die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ charakteristisch, dagegen der konstante Faktor willkürlich.

Im *zweiten* Fall seien $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$ die invarianten Punkte und $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ die invarianten Geraden. Alsdann lässt sich die infinitesimale projektive Transformation (14) auf die Form bringen:

$$\delta x_1 = (x_1 + x_3)\delta t, \quad \delta x_2 = 2x_2\delta t, \quad \delta x_3 = x_3\delta t, \tag{20}$$

sodass statt (15) kommt:

$$\frac{dx_1}{x_1 + x_3} = \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_3}{x_3}.$$

Integration giebt die W-Kurven der zweiten Art, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

$$x_1 = (c_1 + c_3 t)e^t, \quad x_2 = c_2 e^{2t}, \quad x_3 = c_3 e^t \quad (c_1, c_2, c_3 = \text{const.}), \tag{21}$$

oder nicht-homogen, nach (16):

$$y = \text{const. } e^x. \tag{22}$$

Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der zweiten Art lassen sich also durch eine geeignete projektive Transformation der Ebene in die ∞^1 *logarithmischen Kurven* (22) oder:

$$x = \log y + \text{const.} \tag{22'}$$

überführen[56]).

Hierbei und bei den W-Kurven der ersten Art ist aber anzumerken, dass man dabei eventuell *imaginärer* projektiver Transformationen bedarf.

Die *allgemeinste Darstellung* beider Arten von W-Kurven in nicht-homogenen Koordinaten x, y ergiebt sich aus (19) und (22'), wenn man statt x und y linear gebrochene Funktionen von x und y mit gleichen Nennern einführt:

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)^{\alpha_2 - \alpha_3}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)^{\alpha_3 - \alpha_1}(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{\alpha_1 - \alpha_2} = \text{const.}, \tag{19''}$$

55) Nach der *Leibniz*'schen Terminologie, siehe Nr. 1.

56) Die allgemeine logarithmische Kurve oder *Logistica*:

$$y = b \log \frac{x}{a},$$

wo der Logarithmus eine beliebige Basis haben kann, geht durch Affinität aus $y = \log \text{nat. } x$ hervor und ist daher eine W-Kurve. *Leibniz* u. a. haben sie auch *Exponentialkurve* genannt. Siehe Geschichtliches bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 542. Daselbst auch Eigenschaften der Kurve. Auch die ebenda p. 516—518 als *Debeaune'sche Kurven* bezeichneten Kurven gehören zu den obigen W-Kurven.

wo also die Summe der Exponenten gleich Null ist, und:

$$(22'') \qquad \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} - \log \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} = \text{const.}$$

Übrigens sind unter den Kurven (19″) auch algebraische enthalten, so auch die oben erwähnten Geraden und Kegelschnitte. Die Gleichungen (19″), (22″) stellen daher *überhaupt alle algebraischen und transcendenten W-Kurven der Ebene* dar.

Der Übergang zu homogenen Koordinaten liegt auf der Hand.

15. Sätze über allgemeine *W*-Kurven der ersten Art. Wie man durch Anwendung gruppentheoretischer Begriffe Eigenschaften den *W*-Kurven ableiten kann, sei nach *F. Klein* und *S. Lie* für die *W*-Kurven erster Art kurz erläutert. Dabei vgl. Fig. 10.

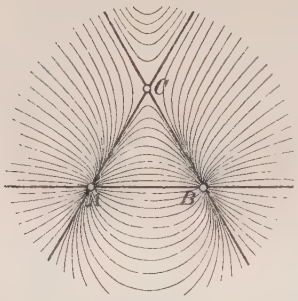

Fig. 10.

Zu den ∞^1 *W*-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der ersten Art gehört ein invariantes Dreieck ABC oder Δ. Es giebt aber ∞^2 projektive Transformationen, die die Ecken und Seiten von Δ invariant lassen. Sie bilden eine zweigliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_2$ von *vertauschbaren* [II A 6, Nr. 6] Transformationen, in der $\mathfrak{G}_1$ als Untergruppe enthalten ist. In $\mathfrak{G}_2$ giebt es eine Transformation, die einen beliebigen Punkt in einen beliebigen anderen Punkt überführt, vorausgesetzt, dass die Punkte nicht auf den Seiten von Δ liegen. Das dazu Dualistische gilt von den Geraden. Hieraus fliessen die folgenden Sätze, die des späteren wegen nummeriert seien:

[1] Eine *W*-Kurve der ersten Art kann nur in den Eckpunkten von Δ singuläre Punkte haben, und nur die Seiten von Δ können singuläre Tangenten sein[56a]). [2] Führt man eine projektive Transformation, die die Ecken und Seiten von Δ in Ruhe lässt, auf die *W*-Kurven einer zu Δ gehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$ aus, so werden diese Kurven nur unter einander vertauscht. [3] Für alle *W*-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist das Doppelverhältnis aus einem Kurvenpunkt und den Schnittpunkten seiner Tangente mit den Seiten von Δ dasselbe; dies Doppelverhältnis ist gleich dem der Tangente mit den Strahlen, die den Berührungspunkt mit den Ecken von Δ verbinden[57])[58]). [4] Kon-

56 a) Die Klassifikation der singulären Stellen der durch Differentialgleichungen definierten Kurven bei *H. Poincaré*, J. de math. (3) 7 (1881), p. 375—422 [II A 4a, Nr. 29], ist der Theorie der *W*-Kurven entnommen.

57) Sind x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten und u_1, u_2, u_3 zugehörige homogene Linienkoordinaten, sodass $\sum u_i x_i = 0$ aussagt, dass der Punkt

struiert man in jedem Punkt P einer W-Kurve von $\mathfrak{G}_1$ die Gerade, die mit den Strahlen, die P mit den Ecken von Δ verbinden, ein konstantes Doppelverhältnis bilden, so umhüllen die ∞^1 Geraden eine W-Kurve derselben Gruppe $\mathfrak{G}_1$. [5] Konstruiert man auf jeder Tangente einer W-Kurve von $\mathfrak{G}_1$ den Punkt, der mit den Schnittpunkten der Tangente mit Δ ein konstantes Doppelverhältnis bildet, so ist der Ort dieser Punkte eine W-Kurve derselben Gruppe $\mathfrak{G}_1$. [6] Zieht man von irgend einem Punkt Tangenten an alle W-Kurven von $\mathfrak{G}_1$, so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kegelschnitt, der durch den Punkt und die Ecken A, B, C von Δ geht[59]). [7] Schneidet man alle W-Kurven durch eine Gerade und konstruiert in jedem Schnittpunkt die Tangente, so umhüllen die Tangenten einen Kegelschnitt, der die Gerade und die Seiten von Δ berührt. [8] Kennt man das Dreieck Δ und zwei Punkte einer W-Kurve, so kann man unendlich viele Punkte derselben Kurve durch lineare Konstruktion finden, ebenso aus zwei bekannten Tangenten unendlich viele. [9] Ist das Dreieck Δ reell, so gehen die reellen W-Kurven einer zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$ durch zwei Ecken von Δ, in denen sie die Seiten berühren, die in der dritten Ecke zusammenlaufen. Sie meiden dagegen die dritte Ecke und die gegenüberliegende Seite. (Vgl. Fig. 10.)

F. Klein und *S. Lie* haben noch viele weitergehende Methoden zur Behandlung der W-Kurven angegeben. Um dies anzudeuten, wählen wir Δ als das Dreieck der x-, y-Axe und unendlich fernen Geraden. Alsdann werden die Transformationen

$$x' = ax^n, \quad y' = by^n$$

betrachtet, die wieder die W-Kurven einer zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1$

$(x_1 : x_2 : x_3)$ auf der Geraden $(u_1 : u_2 : u_3)$ liegt, so werden durch die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ auch u_1, u_2, u_3 linear homogen transformiert. Diese zweigliedrige Gruppe hat in x_1, x_2, x_3 und in u_1, u_2, u_3 eine von nullter Ordnung homogene Invariante, das obige Doppelverhältnis.

58) Wegen der Invarianz dieses Doppelverhältnisses oder *Wurfes* (nach *v. Staudt*'s Terminologie) heissen die Kurven W-Kurven (französisch courbes V). *G. Halphen* hat sie in seiner Étude sur les points singuliers des courbes algébriques, Anhang zu Salmon, Traité de géom. anal., traduit p. Chemin, Paris 1884, *anharmonische Kurven*, *G. Fouret* in den Par. C. R. 78 (1874), p. 1693—97, *spirales équiharmoniques* genannt. Letzterer findet solche Eigenschaften der W-Kurven, die schon *Klein* und *Lie* gefunden haben, von neuem.

59) Hieraus hat *V. Jamet*, Ann. éc. norm. (3) 4, supplém. (1887), p. 3—78, insbes. p. 21, 22, einen Satz abgeleitet: Der Kegelschnitt, der eine W-Kurve erster Art berührt und durch die Ecken des Dreiecks Δ geht, hat im Berührungspunkte doppelt so grosse Krümmung wie die W-Kurve. *G. Fouret* behauptet in den Par. C. R. 110 (1890), p. 778—781, insbes. p. 781, diesen Satz schon 1875 im Paris Soc. math. Bull. bewiesen zu haben.

in W-Kurven derselben Gruppe überführen[60]). Führt man ferner auf eine beliebige Kurve, die *keine* W-Kurve ist, und gleichzeitig auf einen beliebigen Punkt alle ∞^2 Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ aus, so erhält man eine Zuordnung zwischen allen ∞^2 Punkten und gewissen ∞^2 Kurven der Ebene, d. h. eine *Berührungstransformation.* Sie vertauscht alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ untereinander, u. s. w.[61]).

Bei passender Wahl des Dreiecks Δ geben die W-Kurven der ersten Art verschiedene wichtige Familien von transcendenten Kurven, die wir in Nr. **16, 17** besprechen.

16. Logarithmische Spiralen. Zwei Ecken von Δ seien die imaginären Kreispunkte, die dritte der reelle Punkt O. Dann folgt aus Satz [3]: Alle W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ durchsetzen die von O ausgehenden Strahlen unter demselben Winkel α. Wird O als Pol von Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ gewählt, so ist also für die Kurven:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{d\mathfrak{r}}{d\theta} = \operatorname{ctg} \alpha ,$$

d. h.

$$\log \mathfrak{r} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \theta + \text{const.} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r} = \text{const.}\, e^{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \theta}.$$

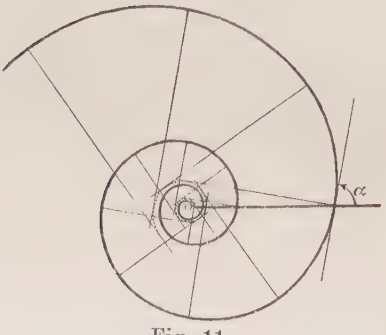

Fig. 11.

Diese Kurven heissen *logarithmische Spiralen*[62]) mit dem Pol O und dem Steigwinkel α. Der Pol O ist ihr einziger reeller singulärer, nämlich asymptotischer Punkt im Endlichen (s. Fig. 11). Die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ sind jetzt alle Ähnlichkeitstransformationen [I A 4, Nr. **6**; III A 5], die O fest lassen. Da $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}_2$ enthalten ist, so folgt: Jede logarithmische Spirale ist sich

60) In der Annalenarbeit p. 70 u. f. Sind zwei der invarianten Punkte die imaginären Kreispunkte, so sind diese Abbildungen konform. Insbesondere ist darin die Transformation durch reziproke Radien [III A 7] enthalten.

61) Wählt man als die Kurve eine Gerade, so erhält man dualistische Transformationen, die das Dreieck Δ invariant lassen. Es folgt dann: Die reziproke Polare [III C 1, Nr. **19**] einer W-Kurve hinsichtlich eines Kegelschnittes, die Δ zum Polardreieck hat, ist eine W-Kurve derselben Gruppe (Annalenarbeit p. 77), insbes. (vgl. Nr. **16**): Die *logarithmische Spirale* ist ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich jeder gleichseitigen Hyperbel, deren Mitte ihr Pol ist und die sie irgendwo berührt.

62) Bezüglich der Geschichte der logarithmischen Spiralen siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 448—454. *Descartes, Torricelli, Varignon* (von dem der Name herrührt) und *Jacob I Bernoulli* sind besonders zu nennen.

selbst ähnlich, indem man zwei beliebige ihrer Punkte als homolog setzen kann. Nach [2] folgt ferner: Alle logarithmischen Spiralen mit demselben Pol O und demselben Steigwinkel α sind einander ähnlich, d. h. nach dem vorigen kongruent. Aus Satz [4] folgt, wenn man das Doppelverhältnis harmonisch wählt: Die *Evolute einer logarithmischen Spirale* ist eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel[63]). Allgemeiner: Die Geraden n, die von den Punkten einer logarithmischen Spirale ausgehen und mit den jeweiligen Tangenten einen konstanten Winkel bilden, umhüllen eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel. Aus Satz [5] folgt: Die *Fusspunktkurve einer logarithmischen Spirale* ist, wenn der Pol der Kurve auch der Pol der Fusspunkttransformation ist, eine logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel. Dasselbe gilt, wenn man statt der Lote Geraden unter konstanter Neigung von O nach den Tangenten zieht. Aus Satz [6] folgt: Zieht man von einem Punkte P die Tangenten an alle Windungen eine logarithmischen Spirale (und an alle logarithmische Spiralen mit demselben Pol und demselben Steigwinkel), so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kreis, der durch P und den Pol geht. Aus Satz [7] folgt: Konstruiert man in allen Schnittpunkten einer Geraden g mit einer logarithmischen Spirale (und mit allen logarithmischen Spiralen mit demselben Pol und demselben Steigwinkel) die Tangenten, so umhüllen die Tangenten eine Parabel, die g berührt und den Pol zum Brennpunkt hat. Aus Satz [8] folgt eine Konstruktion von beliebig vielen Punkten einer logarithmischen Spirale, sobald man deren zwei und den Pol kennt. Die Konstruktion geht auch sofort daraus hervor, dass jede logarithmische Spirale sich selbst auf unendlich viele Arten ähnlich ist. Analoges gilt, wenn man ausser dem Pol zwei Tangenten kennt, von der Konstruktion weiterer Tangenten.

Aus dem oben aus [6] abgeleiteten Satz folgt, wenn man von einem Punkte P der logarithmischen Spirale die Tangente an die Evolute (als logarithmische Spirale mit demselben Pol und demselben Steigwinkel) zieht, dass der Krümmungsmittelpunkt K von P im Schnittpunkt der Normalen mit der Geraden liegt, die in O auf OP senkrecht steht. Hieraus folgt sofort die Rektifikation der Evolute,

63) Dass die Evolute wieder eine logarithmische Spirale ist, ebenso die Antevolute, die man erhält, wenn man jeden Krümmungsmittelpunkt an dem zugehörigen Kurvenpunkt spiegelt, dass ferner die Brennkurve einer logarithmischen Spirale bei Beleuchtung vom Pol aus und zwar bei Reflexion oder Refraktion wieder eine logarithmische Spirale ist, fand *Jacob I Bernoulli*, Acta Erud. 1792. Er nannte die Kurve daher eine *spira mirabilis*.

d. h. einer beliebigen logarithmischen Spirale: Der Bogen der logarithmischen Spirale vom Pol O bis zu einem Punkte P ist gleich der Strecke, die das in O auf OP errichtete Lot auf der Tangente abschneidet, sodass $\varrho = s \operatorname{ctg} \alpha$ oder, bei beliebiger Wahl der Anfangsstelle ($s = 0$):

$$A\varrho + Bs + C = 0$$

die *natürliche Gleichung der logarithmischen Spiralen* ist.

Aus den in Nr. **15** zum Schluss gegebenen Andeutungen folgt auch der Satz, dass die Transformation durch reziproke Radien mit O als Pol jede logarithmische Spirale, die O zum Pol hat, in eine von derselben Steigung und mit demselben Pol, aber von entgegengesetzter Windung, verwandelt. Doch ist dies auch direkt sofort zu sehen[64]).

17. Orthogonale Trajektorien konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen oder Hyperbeln. Das Dreieck Δ sei das der Koordinatenaxen und der unendlich fernen Geraden. Nach Satz [3], Nr. **15**, steht dann die Tangente des Winkels, den die Tangente der W-Kurve in einem Punkte P mit der x-Axe bildet, zu der Tangente des Winkels, den der Radiusvektor OP mit der x-Axe bildet, in einem konstanten Verhältnis. Die orthogonalen Trajektorien [III D 1, 2, Nr. **23**] der W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ haben daher dann die Eigenschaft:

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = c,$$

64) Bezüglich des Anteils, den *F. Klein* und *S. Lie* einzeln an ihren gemeinsamen Arbeiten über W-Kurven haben, sei bemerkt, dass, als *Lie* sich mit den ∞^3 projektiven Transformationen beschäftigte, die ein Tetraeder invariant lassen, *Klein* ihn darauf aufmerksam machte, dass es Kurven giebt, die bei jenen Transformationen nur ∞^2 Lagen annehmen, indem er ihm dies auch analytisch durch Integrieren der betreffenden Differentialgleichungen zeigte. Dies war *Lie* damals ganz neu, hatte er diese Kurven doch auch in seiner Arbeit über die Reziprozitätsverhältnisse des *Reye*'schen Komplexes, Göttinger Nachr. 1870, p. 53—66, übersehen. Er erkannte aber sofort, welche ausgezeichneten Eigenschaften diese Kurven haben müssten. Von ihm rührt die allgemeine Aufstellung der in den Abhandlungen entwickelten Methoden und geometrischen Verwandtschaften her. *Klein* dagegen gebührt die genaue Diskussion der einzelnen Fälle, ferner die Aufdeckung der Beziehung zur Invariantentheorie der binären Formen [I B 2] („jede im Sinne der neueren Geometrie kovariante Kurve einer Kurve W ist eine Kurve W desselben Systems", Annalenarbeit p. 63), sowie der Zusammenhang mit der Metrik, namentlich die Entdeckung, dass die vielen merkwürdigen Eigenschaften der logarithmischen Spiralen nur ein Ausfluss aus der allgemeinen Theorie sind. Das Operieren mit projektiven Transformationen und Gruppen war *Klein* und *Lie* gleichmässig vertraut. Vgl. auch *M. Noether*, Math. Ann. 53 (1900), p. 1—41, insbes. p. 8.

wo die Konstante c für die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ charakteristisch ist. Sie sind also die Kurven:

$$y^2 = cx^2 + \text{const.}$$

Die W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ sind somit jetzt die orthogonalen Trajektorien einer Schar von ∞^1 konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen oder Hyperbeln[65]). Die Gleichungen der Kurven haben die in (19′), Nr. **14**, angegebene Form. Die interscendenten höheren Parabeln:

$$y = \text{const.}\ x^m$$

sind mithin die orthogonalen Trajektorien von ∞^1 konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen oder Hyperbeln.

18. Dreieckspotentialkurven und adiabatische Kurven. Sind l_1, l_2, l_3 die Seitenlängen eines Dreiecks Δ und x_1, x_2, x_3 die barycentrischen Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das Dreieck, so nennt *G. de Longchamps*[66]) die Kurven, für die x_1, x_2, x_3 derselben Potenz der Seiten l_1, l_2, l_3 proportional sind, *Dreieckspotentialkurven*. Ihre Gleichungen sind, ausgedrückt mittels eines Parameters t:

$$x_1 = \varrho\, l_1^{\,t}, \quad x_2 = \varrho\, l_2^{\,t}, \quad x_3 = \varrho\, l_3^{\,t}.$$

Wird

$$\log \frac{l_2}{l_3} = \alpha_1, \quad \log \frac{l_3}{l_1} = \alpha_2, \quad \log \frac{l_1}{l_2} = \alpha_3$$

gesetzt, so giebt die Elimination von ϱ und t:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = 1,$$

wobei

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

ist. Diese Kurven sind also nach (19″), Nr. **14**, unter den W-Kurven der ersten Art enthalten. Sie gehen durch mehrere merkwürdige Punkte des Dreiecks Δ.

Auch die *adiabatischen Kurven* der Thermodynamik $pv^n = \text{const.}$ ordnen sich der Form (19′) unter[67]).

19. Sätze über W-Kurven der zweiten Art. Analog den in Nr. **15** angegebenen Betrachtungen lassen sich solche für W-Kurven der zweiten Art anstellen (s. Fig. 12). Es giebt zwar ∞^3 projektive Transformationen, die dieselben beiden Punkte und beiden Ge-

65) *G. Scheffers* in *Lie-Scheffers*, a. a. O. p. 78.

66) Mathesis 6 (1886), p. 246—248. Siehe auch *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 556.

67) Ihr Name soll herrühren von *M. Rankine*, A manual of the steam engine and other prime movers, London u. Glasgow, 1859. Vgl. *G. Zeuner*, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl., Leipzig 1877, p. 80 u. 130. Sie heissen auch *polytropische Kurven*.

raden (vgl. Nr. **14**) wie die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ einer Schar von W-Kurven der zweiten Art invariant lassen, aber unter ihnen giebt es wieder ∞^2, die unter einander vertauschbar sind und eine zweigliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_2$ bilden, die $\mathfrak{G}_1$ als Untergruppe enthält. Die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ vertauschen alle ∞^1 W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ unter einander. Doch gehen wir hierauf nicht näher ein und bemerken nur folgendes: Analog dem Satze [3], Nr. **15**, gilt hier ein Satz, nur tritt an die Stelle des Doppelverhältnisses ein anderer nicht so einfacher Ausdruck[68]). In dem besonderen Fall, dass die x-Axe die eine, die unendlich ferne Gerade die andere invariante Gerade und die unendlich fernen Punkte beider Axen die invarianten Punkte sind, d. h. für die *logarithmischen Kurven* (22) in Nr. **14**:

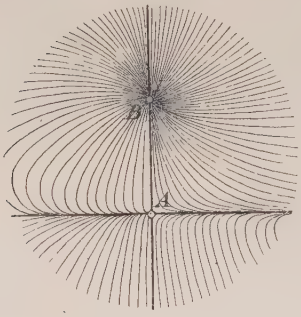

Fig. 12.

$$y = \text{const. } e^x$$

ist jener Ausdruck die *Subtangente*. Die Konstanz der Subtangente[69]) dieser logarithmischen Kurven ist also nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes. Analog dem in Nr. **17** angegebenen Satze gilt noch der Satz: Die *orthogonalen Trajektorien von* ∞^1 *kongruenten Parabeln mit derselben Axe* sind W-Kurven der zweiten Art[70]).

20. W-Kurven im Raume, gemeine Schraubenlinien. Auch im Raume sind die W-Kurven die Bahnkurven einer eingliedrigen projektiven Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Hier ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten dreizehn (s. Anm. 53). Beschränken wir uns auf den Fall, dass die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ die Ecken und Ebenen eines nicht ausgearteten Tetraeders in Ruhe lässt, so lauten die Gleichungen der ∞^2 W-Kurven einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$, wenn das Tetraeder als Koordinatentetraeder gewählt wird, analog (18), Nr. **14**, so[71]):

$$x_1 = \text{const. } e^{a_1 t}, \quad x_2 = \text{const. } e^{a_2 t}, \quad x_3 = \text{const. } e^{a_3 t}, \quad x_4 = \text{const. } e^{a_4 t}.$$

68) Wie früher, vgl. die Anm. 57, hat die Gruppe $\mathfrak{G}_2$, ausgedehnt auch auf die Linienkoordinaten, eine in x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 von nullter Ordnung homogene Invariante, die eben den fraglichen Ausdruck darstellt.

69) Nach *G. Loria* hat *Torricelli* diesen Satz zuerst ausgesprochen und *G. Grandi* ihn bewiesen. Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 543.

70) Nach *G. Scheffers* in *Lie-Scheffers,* a. a. O. p. 80.

71) Siehe z. B. *S. Lie,* Geometrie d. Berührungstransformationen 1, bearb. v. *Scheffers,* Leipzig 1896, p. 334. Gestattet eine Kurve der Ebene oder des Raumes mehr wie eine infinitesimale projektive Transformation, d. h. *ist sie in doppelter*

Das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Tangente einer W-Kurve die Ebenen des Tetraeders trifft, ist offenbar konstant. Daher werden uns diese Kurven in Nr. **35** abermals begegnen.

Erwähnt sei hier nur noch der wichtigste spezielle Fall: Ist die infinitesimale Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ eine unendlich kleine Schraubung [IV 2, Nr. **11**; IV 3, Nrr. **18, 19**], etwa um die z-Axe:

$$\delta x = -y\,\delta t, \quad \delta y = x\,\delta t, \quad \delta z = q\,\delta t \quad (q = \text{const.}),$$

so sind die zugehörigen ∞^2 W-Kurven die *gemeinen Schraubenlinien*:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad z = qt,$$

die sämtlich die z-Axe zur Axe und die gleiche Höhe $2\pi q$ eines Schraubenumganges haben. Für die gemeinen Schraubenlinien kann man daher Sätze analog denen von Nr. **15** aufstellen, Sätze, die der projektiven Geometrie angehören, obgleich die Kurven transcendent sind[72]).

Nach *V. Puiseux*[73]) lassen sich die gemeinen Schraubenlinien als diejenigen Kurven definieren, bei denen Krümmung und Torsion konstant ist [III D 1, 2, Nrr. **29, 30, 32**]. Aber *J. Lyon*[74]) hat gezeigt, dass es ausserdem gewisse imaginäre Kurven dritter Ordnung giebt, die dieselbe Eigenschaft haben. Die gemeinen Schraubenlinien können auch als die geodätischen Kurven der Rotationscylinder [III D 3, Nr. **14**] oder als die Loxodromen der Rotationscylinder (Nr. **34**) definiert werden. Letztere Definition versagt jedoch auf Cylindern von Minimalgeraden[75]).

Noch einige andere Kurven, die wir später besprechen, sind räumliche W-Kurven, nämlich die *sphärischen Loxodromen* und die *cylindrokonischen Schraubenlinien* (Nr. **34**).

Weise als W-Kurve aufzufassen, so ist sie algebraisch, nämlich eine Gerade, ein Kegelschnitt oder eine Raumkurve 3. Ordnung. Siehe z. B. *S. Lie,* Theorie der Transformationsgruppen, 3. Abschnitt, bearb. v. *Engel,* Leipzig 1893, p. 187.

72) Die Tangenten einer gemeinen Schraubenlinie gehören einem linearen Komplexe [III C 9] an, dessen Axe die des zugehörigen Cylinders ist. Die Schmiegungsebene eines Punktes der Kurve ist die dem Punkte vermöge des Komplexes zugeordnete Ebene. Nach *J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes, hgg. von *F. Klein,* 1. Abt., Leipzig 1868, p. 59—61, folgen hieraus viele Eigenschaften der gemeinen Schraubenlinie ohne weiteres, so die von *Th. Reye,* Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 64—66, angegebene. Vgl. auch die zweite Note von *F. Klein* und *S. Lie* in den C. R. 70 (1870), p. 1275—1279, bezüglich der Eigenschaften der räumlichen W-Kurven.

73) J. de math. (1) 7 (1842), p. 65—69. Synthetischer Beweis desselben Satzes bei *J. Bertrand,* ebenda 13 (1848), p. 423—424.

74) Grénoble Ann. de l'Enseignement sup. 2 (1890). Auch als Thèse, Paris. (Vom Verf. nicht eingesehen.)

75) Vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 283 u. f.

III. Sinusspiralen und ihre Verallgemeinerungen.

21. Sinusspiralen. Die Kurven, die in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{r}^n = a^n \sin n\theta \tag{23}$$

haben, heissen *Sinusspiralen*[76]). Sie sind ausserordentlich oft[77]) der

---

76) Diese Bezeichung, franz. *spirales sinusoïdes,* hat *Hâton de la Goupillière* eingeführt. Vgl. J. éc. polyt. 38 (1861), p. 15—112, insbes. p. 90. Wahrscheinlich schon in seiner Thèse, Paris 1857.

77) Einen Begriff hiervon giebt die folgende noch keineswegs vollständige Aufzählung von Arbeiten, in denen die Sinusspiralen vorkommen: *C. Maclaurin,* Treatise on fluxions 1, Edinburg 1740, Kap. 11, prop. 34, in der Ausgabe London 1801 p. 328—332, auch schon (nach *H. de la Goupillière*) in den Phil. Trans. 1718, Nr. 356; *G. C. di Fagnano,* Produzioni matematiche 2, Pesaro 1750, p. 375—412; ferner bei *Euler, L'Hospital* und *Riccati.* In neuerer Zeit: *G. Lamé,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 77—87; *A. Serret,* J. de math. (1) 7 (1842), p. 114—119, ebenda 8 (1843), p. 495—501; *O. Bonnet,* ebenda 9 (1844), p. 97—112; *W. Roberts,* ebenda 10 (1845), p. 177—193; ebenda 12 (1847), p. 445—448; ebenda 13 (1848), p. 209—220; *J. Liouville,* ebenda p. 220; *W. Roberts,* ebenda 15 (1850), p. 209—214; *A. Winckler,* J. f. Math. 50 (1855), p. 34 (vgl. hierzu *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 401); *Hâton de la Goupillière,* Thèse, Paris 1857; J. éc. polyt. 38 (1861), p. 15—112; *E. Beltrami,* Ann. di mat. (1) 4 (1861), p. 102—108; *B. Tortolini,* Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), p. 209—213; *Allégret,* Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 30—32; *F. Unferdinger,* Archiv Math. Phys. (1) 51 (1870), p. 72—93; *J. F. Moulton,* Educ. Times 15 (1871), p. 81; *Allégret,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 162—167; Ann. éc. norm. (2) 2 (1873), p. 149—200; *L. Aoust,* Anal. infin. des courbes planes, Paris 1873, p. 141; *G. Darboux,* Sur une classe remarquable de courbes etc., Paris 1873 (Auszug in den Par. C. R. 68 (1869), p. 1311); *Hâton de la Goupillière,* Nouv. Ann. (2) 15 (1876), p. 97—108; *A. Mannheim,* Paris Soc. math. Bull. 4 (1876), p. 158, 159 (citiert hierbei *Archer Hirst*); *G. Holzmüller,* J. f. Math. 83 (1877), p. 38—42; *B. Niewenglowski,* Par. C. R. 84 (1877), p. 765—768; *H. Résal,* J. de math. (3) 6 (1880), p. 115—128; *A. Ribaucour,* Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. 44, 1881; *G. Holzmüller,* Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 231—256, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1882, 9. Kap.; *E. M. Laquière,* Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 118—129; *A. Bassani,* Giorn. di mat. 24 (1886), p. 23—43; *Du Chatenet,* Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 233—237; *H. Brocard,* ebenda p. 397—398; *V. Jamet,* Ann. de l'éc. norm. (3) 4 (1887), suppl. p. 3—78; *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190; *V. Jamet,* Paris Soc. math. Bull. 16 (1888), p. 132—135; *A. de Saint-Germain,* Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, 2. éd. Paris 1889, p. 155—156; Lord *M'Laren,* Edinb. Proc. Roy. Soc. 17 (1889), p. 281—297; *J. McMahon,* Educ. Times 50 (1889), p. 169—170; *A. Demoulin,* Sur une transformation géométrique, Bruxelles Mém. 44, 7 mars 1891; *G. Fouret,* Paris Soc. math. Bull. 20 (1892), p. 60—64; *R. Godefroy,* J. éc. polyt. 62 (1892), p. 37—46; Paris Soc. math. Bull. 21 (1893), p. 20—25; *J. M. Iversen,* Nyt Tidsskrift for

Gegenstand von Einzeluntersuchungen gewesen, namentlich die algebraischen, d. h. diejenigen, bei denen der *Index* n rational ist. Viele dieser Untersuchungen gelten jedoch ohne weiteres auch für irrationales n. Der Pol O der Polarkoordinaten ist im Endlichen der einzige singuläre Punkt der Kurve mit unbestimmter Tangente [III D 1, 2, Nr. 19]. Durch Drehung der Kurve um ihren Pol O nimmt ihre Gleichung die Form an:

$$r^n = a^n \sin n\,(\theta - \alpha).$$

Durch ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung von O aus ändert sich nur a. Es giebt also ∞^2 *Sinusspiralen mit demselben Pol und demselben Index.* Sie sind *alle einander ähnlich*, und der Pol ist bei allen ein homologer Punkt [III A 6]. Allerdings machen wir hierbei zwischen reellen und imaginären Ähnlichkeitstransformationen keinen Unterschied[78]).

22. Abbildung der Geraden der Ebene als Sinusspiralen. Der innere Grund für viele merkwürdige Eigenschaften der Sinusspiralen liegt in einem Satze von *C. Maclaurin*, der bei *W. Roberts*[79]) wiederkehrt. Sind r_0, θ_0 und r, θ Polarkoordinaten in zwei zusammenliegenden Ebenen, so stellen die Gleichungen:

$$r = r_0^m, \qquad \theta = m\theta_0 \tag{24}$$

bei gegebenem rationalen oder irrationalen m eine Punkttransformation dar, die *konform* ist [II B 1, Nrr. 5, 18]. Denn in rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0 bezw. x, y kann (24) so geschrieben werden[80]):

$$x + iy = (x_0 + iy_0)^m. \tag{25}$$

Bei irrationalem m dürfte (24) wohl die *einfachste transcendente konforme Abbildung der Ebene* vorstellen. Sie führt nun nach *Maclaurin*

Math. 4 (1893), p. 59—67; *H. Ekama*, Archiv Math. Phys. (2) 12 (1894), p. 23—36; *E. Barisien*, Nouv. Ann. (3) 14 (1895), p. 233—244; *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1898, p. 261—294; *R. C. Archibald*, Diss. Strassburg 1900; *E. Cesàro*, Natürliche Geometrie 1901, p. 54 u. f.; *G. Loria*, Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 392—440, insb. p. 396; Spezielle Kurven, 1902, p. 367, 391—403, 614, 675, 732.

Viele von diesen Arbeiten behandeln allerdings nur *algebraische* Sinusspiralen. Ausserdem giebt es noch viele Untersuchungen über einzelne Sinusspiralen, die wir nicht citiert haben.

78) Unter den algebraischen Sinusspiralen sind viele besonders bemerkenswerte Kurven enthalten, so der Kreis ($n = 1$), die Lemniskate ($n = 2$), die Kardioide ($n = \frac{1}{2}$), die Parabel ($n = -\frac{1}{2}$), die Gerade ($n = -1$), die gleichseitige Hyperbel ($n = -2$) u. s. w. Siehe *Haton de la Goupillière*, a. a. O. 1876, p. 97, 98.

79) Fussn. 77, 1740 bez. 1848.

80) *J. Liouville*, Fussn. 77, 1848; vgl. auch *G. Holzmüller*, Isog. Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 166—171.

die Geraden der Ebene (r_0, θ_0) in Sinusspiralen der Ebene (r, θ) über. In Polarkoordinaten r_0, θ_0 ist nämlich

$$r_0 \cos(\theta_0 - \alpha) = p$$

die Gleichung einer allgemein gewählten Geraden, bei der p den Abstand vom Anfangspunkt und α seinen Winkel mit dem Anfangsstrahl bedeutet. Führen wir auf die Gerade die Transformation (24) aus, so geht sie in die Kurve:

$$r^{\frac{1}{m}} \cos\left(\frac{\theta}{m} - \alpha\right) = p,$$

d. h., wenn $-1 : m = n$ gesetzt wird, in die Sinusspirale:

$$r^n = \frac{1}{p} \sin\left(n\theta + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

über. Hieraus folgt: Alle ∞^2 Geraden der Ebene gehen vermöge der konformen Abbildung (24) in alle ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und demselben Index $n = -1 : m$ über. Nach den *S. Lie*schen Theorien kann man hieraus methodisch die Eigenschaften der Sinusspiralen ableiten: Da die Schar aller ∞^2 Geraden der Ebene ∞^8 Punkttransformationen, nämlich die allgemeine projektive Gruppe [II A 6, Nr. **20**], gestattet, so *gehen alle ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol und demselben Index vermöge einer achtgliedrigen Gruppe von Punkttransformationen in einander über.* Jede einzelne bleibt bei einer sechsgliedrigen Gruppe invariant. Doch ist der hierdurch angedeutete Weg bisher nicht eingeschlagen worden.

Giebt man in (24) dem Exponenten m beliebige konstante Werte, so liegt in (24) eine eingliedrige Gruppe von konformen Punkttransformationen vor, die unter anderen die Transformation durch reziproke Radien enthält. Die Aufeinanderfolge der zu den Exponenten m und μ gehörigen Transformationen (24) ist der Transformation (24) mit dem Exponenten $m\mu$ äquivalent. Daraus folgt, wenn $n = -1 : m$, also $-1 : m\mu = n : \mu$ gesetzt wird: Die Sinusspiralen mit gemeinsamem Pol O und vom Index n gehen vermöge der konformen Abbildung

$$r = r_0^{\mu}, \qquad \theta = \mu\theta_0$$

in die Sinusspiralen mit gemeinsamem Pol O und vom Index $n : \mu$ über[81]). Insbesondere geht jede Sinusspirale vom Index n vermöge einer Transformation durch reziproke Radien, deren Pol der Pol der Kurve ist, in eine Sinusspirale vom Index $-n$ über.

Führt man die Gesamtheit *aller* ∞^1 konformen Transformationen

81) *E. Cesàro,* Fussn. 77, 1888, p. 188; 1901, p. 65.

(24), angefangen von der identischen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$, $\theta = \theta_0$, auf eine Gerade aus, so geht diese Gerade stetig in die Gestalten *aller* Sinusspiralen von beliebigen Indices über.

Betrachtet man eine Schar von parallelen Geraden und dreht sie um O, so bilden die neuen Geraden mit den alten einen konstanten Winkel. Daraus folgt, wenn die konforme Abbildung (24) ausgeübt wird: Dreht man alle ∞^1 Sinusspiralen

$$\mathfrak{r}^n = \text{const. } \sin n\theta$$

um den gleichen Winkel um den Pol, so schneiden die neuen Sinusspiralen die alten unter einem konstanten Winkel. Überhaupt *alle* ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und demselben Index n können definiert werden als diejenigen Kurven, die die soeben angegebenen ∞^1 Sinusspiralen unter konstanten Winkeln durchsetzen. In jedem Punkte P der Ebene bilden die Krümmungskreise der hindurchgehenden ∞^1 Sinusspiralen ein Büschel, nach einem allgemeineren Satze von *E. Cesàro*[82]). Daraus kann man schliessen[83]): Die ∞^2 Sinusspiralen mit dem Pol O und dem Index n und die ∞^2 Sinusspiralen mit demselben Pol O und dem Index $-n$ liegen so, dass alle Krümmungskreise der durch einen Punkt P gehenden Sinusspiralen der ersten Schar einen zweiten Punkt Q gemein haben und hier zugleich die Krümmungskreise aller durch Q gehenden Sinusspiralen der zweiten Schar sind. Dabei liegen P und Q auf einem Strahl durch O und zwar ist:

$$OP : OQ = (n-1) : (n+1).$$

23. Einige Eigenschaften der Sinusspiralen. Aus der konformen Abbildung folgt, was auch durch Rechnung sofort zu bestätigen ist, dass bei der Sinusspirale (23) vom Index n der Winkel τ des Radiusvektors und der Tangente den Wert $\tau = n\theta$ hat, sodass

$$\frac{d(\tau+\theta)}{d\theta} = n+1$$

ist, d. h. beim Fortschreiten auf der Sinusspirale ist das Verhältnis aus der Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Tangente und der Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Radiusvektors konstant, nämlich gleich $(n+1) : 1$. Umgekehrt: Eine Kurve, bei der dies Verhältnis den konstanten Wert $(n+1) : 1$ hat, ist eine Sinusspirale vom Index n, die den Anfangspunkt der Radienvektoren zum Pol hat[84]). Aus der bekannten Konstruktion der Tangente der Fuss-

82) Natürliche Geometrie, p. 148, vgl. auch III D 1, 2, Nr. 23.

83) *G. Scheffers,* Fussn. 77, 1898, p. 292.

84) Deshalb nennt *Laquière,* Fussn. 77, 1883, p. 121 die Sinusspiralen *courbes*

punktkurve [III D 1, 2, Nr. 7] folgt hieraus: *Die Fusspunktkurve einer Sinusspirale* ist, wenn ihr Pol als Pol der Fusspunktransformation genommen wird, eine Sinusspirale mit demselben Pol und dem Index $n:(n+1)$. Allgemein: Die k^{te} *Fusspunktkurve* ist eine Sinusspirale vom Index $n:(kn+1)$. Dies gilt auch für negatives k, ja auch für gebrochenes oder irrationales k, wenn man die *stetige* Gruppe von Fusspunkttransformationen mit dem Pole O benutzt, die *S. Lie* eingeführt hat[85]).

Ist ds das zum Zuwachs $d\theta$ der Amplitude gehörige Bogenelement der Sinusspirale (23), so ist:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\mathfrak{r}}{\sin n\theta} = \frac{a^n}{\mathfrak{r}^{n-1}}.$$

Der zugehörige Kontingenzwinkel ist gleich $(n+1)\,d\theta$, also der Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{ds}{(n+1)\,d\theta} = \frac{\mathfrak{r}}{(n+1)\sin n\theta} = \frac{a^n}{(n+1)\,\mathfrak{r}^{n-1}}.$$

Die Projektion von ϱ auf den Radiusvektor hat daher die Länge:

$$\varrho \sin n\theta = \frac{\mathfrak{r}}{n+1}.$$

Die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor verhält sich also zum Radiusvektor wie $1:(n+1)$.[86]) Der Ort der Projektionen der Krümmungsmittelpunkte auf die zugehörigen Radienvektoren ist daher eine der ursprünglichen Sinusspirale ähnliche Sinusspirale.

Umgekehrt: Steht bei einer ebenen Kurve die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor zu diesem in einem konstanten Verhältnis $1:(n+1)$, so ist die Kurve eine Sinusspirale vom Index n, die den Anfangspunkt der Radienvektoren zum Pol hat. Oder: Dann und nur dann, wenn die Kurve eine Sinusspirale vom Index n ist, schneidet der Krümmungskreis eines Kurvenpunktes auf dem zugehörigen Radiusvektor eine Strecke ab, die zum Radiusvektor in dem konstanten Verhältnis $2:(n+1)$ steht.

Anscheinend liegt für $n=0$ eine Ausnahme vor, denn die Kurve, bei der die Projektion des Krümmungsmittelpunktes auf dem Radiusvektor im Pole O liegt, ist nach Nr. **16** eine *logarithmische Spirale.*

---

spirales à inflexion proportionelle. A. Ribaucour, Fussn. 77, 1881, nennt sie dagegen *Lamé'sche Kurven* (vgl. *G. Lamé,* a. a. O. 1836). *Allégret,* a. a. O. 1873, p. 167, nennt sie *orthogénides. G. Holzmüller,* J. f. M. 83 (1887), p. 40, nennt sie *Hyperbeln höherer Ordnung. E. Cesàro,* Natürl. Geom. p. 63, findet den Namen Sinusspiralen doppelt unzutreffend.

85) Siehe *Lie-Scheffers,* Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 65.

86) *A. Serret,* Fussn. 77, 1842, p. 118.

Aber die logarithmischen Spiralen sind thatsächlich als Sinusspiralen vom Index 0 aufzufassen. Da nämlich die Sinusspirale (23) nach Drehung und ähnlicher Vergrösserung wieder eine wird, so liegt in:

$$\left(\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)^n = \frac{\sin(n\theta + \alpha)}{\sin\alpha}$$

eine Sinusspirale vor; doch giebt diese Gleichung für $n = 0$ eine Identität. Aber es ist:

$$\lim_{n=0} \frac{\left(\frac{\mathfrak{r}}{a}\right)^n - \frac{\sin(n\theta + \alpha)}{\sin\alpha}}{n} = \log\frac{\mathfrak{r}}{a} - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \theta,$$

d. h. für $n = 0$ geht die logarithmische Spirale hervor[87]):

$$\log\frac{\mathfrak{r}}{a} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \theta.$$

Der obige Satz über die Sinusspiralen kann auch so ausgesprochen werden: Es ist für die Sinusspiralen charakteristisch, dass der Krümmungsradius ϱ zu demjenigen Abschnitt ν der Normalen, der vom Kurvenpunkt P und dem Lote p zu OP in O begrenzt wird, ein konstantes Verhältnis $1 : (n + 1)$ hat[88]).

24. Rektifikation der Sinusspiralen. Aus (26) und (23) ergiebt sich für die Bogenlänge s der Sinusspirale:

$$s = a\int (\sin n\theta)^{\frac{1-n}{n}}\, d\theta.$$

A. Serret hat den Bogen innerhalb gewisser Grenzen durch *Euler*'sche Integrale zweiter Gattung [II A 3, Nr. **12**a] ausgedrückt[89]). Er benutzt die Gleichung der Sinusspirale in der Form:

$$\mathfrak{r}^n = a^n \cos n\theta, \tag{26}$$

die aus (23) durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgeht. Hier kommt:

$$s = a\int (\cos n\theta)^{\frac{1-n}{n}}\, d\theta.$$

Wird $\vartheta = n\theta$ als Veränderliche eingeführt, so kommt:

$$s = \frac{a}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{\frac{1-n}{n}}\, d\vartheta$$

87) *Allégret,* Fussn. 77, 1872, p. 163.

88) Bei reellen Kurven giebt das positive oder negative Vorzeichen des Verhältnisses $1 : (n + 1)$ an, ob ϱ und ν auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten des Kurvenpunktes P liegen.

89) *Serret,* Fussn. 77, 1842, p. 118. Es ist dies einer der Hauptgründe, weshalb sich so viele Mathematiker mit den Sinusspiralen beschäftigt haben.

als *Länge des Bogens von* $\theta = 0$ *bis* $\theta = \frac{\pi}{2n}$. Dies aber lässt sich so schreiben:

$$s = \frac{a}{n} \cdot 2^{\frac{1-2n}{n}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Haton de la Goupillière[90]) hat die zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2n}$ gelegene *Fläche* durch Γ-Funktionen ausgedrückt.

25. Triangulär- und tetraedral-symmetrische Kurven. Die Sinusspiralen sind ein Grenzfall einer allgemeineren von *J. de la Gournerie* 1865/66 untersuchten Klasse von Kurven[91]). Betrachtet man z. B. die Sinusspirale in der Form:

$$r^n \cos n\theta = k,$$

so lässt sich dafür schreiben:

$$(re^{i\theta})^n + (re^{-i\theta})^n = 2k$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten[92]):

$$(x + iy)^n + (x - iy)^n = 2k.$$

Diese Gleichung ordnet sich aber der allgemeinen Gleichung unter:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^n = 0, \tag{27}$$

in der x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten sind. Man braucht nämlich nur zwei Ecken des Koordinatendreiecks in die imaginären Kreispunkte zu verlegen. Die Kurven (27) heissen nach *J. de la Gournerie triangulär-symmetrische Kurven.* Sie sind ein Grenzfall von Raumkurven, die er *tetraedral-symmetrische Kurven* nennt und — im Falle homogener Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 im Raume — als Schnittkurven zweier *tetraedral-symmetrischen Flächen*:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^n + \left(\frac{x_4}{a_4}\right)^n = 0,$$

$$\left(\frac{x_1}{b_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{b_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{b_3}\right)^n + \left(\frac{x_4}{b_4}\right)^n = 0$$

90) Fussn. 77, 1876, p. 105; später auch *G. Loria,* siehe Spezielle Kurven, p. 395.

91) Recherches sur les surfaces reglées tetraédrales, Paris 1867. Hierin sind die drei Abhandlungen vereinigt, die 1865 und 1866 in dem Recueil des Savants étrangers veröffentlicht worden waren.

92) In dieser Form traten die Sinusspiralen bei *E. Beltrami,* Fussn. 77, 1861, auf, als er die Scharen von ∞^1 ebenen Kurven suchte, die, um einen festen Punkt der Ebene gedreht, stets die ursprünglichen Kurven unter einem für alle Kurven konstanten Winkel schneiden sollten. Vgl. Nr. 22. Siehe auch *V. Jamet,* a. a. O. 1888, p. 133; *G. Fouret,* a. a. O. 1892, p. 62.

definiert. (Für $b_1 = b_2 = b_3 = \infty$ geht hieraus $x_4 = 0$ und also (27) als Grenzfall hervor.) Doch sind diese Kurven im wesentlichen nur für den Fall, dass n eine rationale Zahl ist, also wenn sie algebraisch sind, betrachtet worden. Wir erwähnen deshalb nur einen Satz von *V. Jamet*[93]), der auch für die transcendenten Kurven gilt, und zwar beschränken wir uns dabei auf die triangulär-symmetrischen Kurven: Konstruiert man den Kegelschnitt, der die Kurve (27) in einem ihrer Punkte berührt und durch die Ecken des Koordinatendreiecks geht, so steht der Krümmungsradius des Kegelschnitts zu dem der Kurve an der gemeinsamen Stelle im Verhältnis $(1 - n) : 2$. Im Raume giebt es einen analogen Satz, in dem eine Kurve dritter Ordnung an die Stelle des Kegelschnittes tritt[94]).

Die triangulär-symmetrischen Kurven (27) gehen aus den Geraden der Ebene:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

mittels der Transformationen von der Form:

$$x_1' = c_1 x_1^n, \quad x_2' = c_2 x_2^n, \quad x_3' = c_3 x_3^n$$

hervor.

26. Cesàro'sche, insbesondere Ribaucour'sche Kurven. Die Sinusspiralen gehören fernerhin einer anderen grösseren Kurvenfamilie an, die besonders von *E. Cesàro*[95]) untersucht und deshalb nach ihm benannt worden ist[96]). Es sind dies diejenigen ebenen Kurven, die in Bezug auf einen festen Kreis k (die *Direktrix*) die Eigenschaft haben, dass ihr Krümmungsradius ϱ demjenigen Abschnitt $\nu = PN$ der Normalen proportional ist, der vom Kurvenpunkte P einerseits und von der Polaren p, die P hinsichtlich des Kreises k hat, andererseits begrenzt wird. (Fig. 13.) Das konstante Verhältnis sei mit $1 : (n + 1)$ bezeichnet, und zwar soll bei reellen Kurven das Vorzeichen des Verhältnisses angeben, ob ϱ und ν auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P liegen. Die Mitte O des Kreises k heisst der *Pol* der

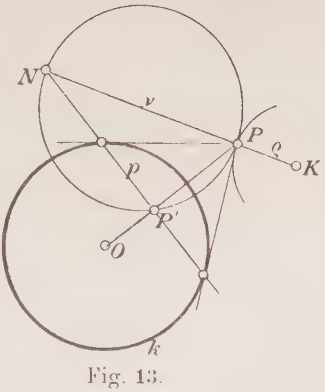

Fig. 13.

93) Fussn. 77, 1887, p. 19.

94) Fussn. 77, 1887, p. 32.

95) Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190; ebenda 9 (1890), p. 143—157; ebenda 13 (1894), p. 102—106; Natürliche Geometrie, p. 54—66.

96) Nach Vorschlag von *E. Wölffing,* Biblioth. math. (3) 1 (1900), p. 142—159, insbes. p. 146 Anm.

Kurve, die Zahl n ihr *Index*. Ist der Kreis insbesondere der Punkt O selbst, so ist die Polare p das in O auf OP zu errichtende Lot, die Kurve also in der That nach Nr. **23**, Schluss, eine Sinusspirale vom Index n.

E. Cesàro zeigte, dass der von O ausgehende Radiusvektor OP der Cesàro'schen Kurve den Krümmungsradius der Evolute in dem konstanten Verhältnis $-(n+1):2n$ teilt und dass diese Eigenschaft als Definition der Kurve benutzt werden kann[97]). Die Kreise ferner, deren Durchmesser die Strecken ν sind, d. h. also die Kreise, die die Cesàro'sche Kurve berühren und den Direktrixkreis k senkrecht schneiden, umhüllen ausser der Cesàro'schen Kurve eine zweite Kurve, deren Punkte P' die Stellen sind, in denen die Polaren p der Punkte P die Radienvektoren OP treffen. Da dann $OP \cdot OP' = R^2$ ist, wenn R der Radius der Direktrix ist, so ist die Kurve (P') zur Cesàro'schen Kurve (P) hinsichtlich des Kreises k invers.

Die natürliche Gleichung der Cesàro'schen Kurven vom Index n hat nach *E. Cesàro*[98]) die Form:

$$(28) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1}},$$

wo s die Bogenlänge, c eine willkürliche Konstante bedeutet.

Unter den Cesàro'schen Kurven sind viele bekannte Kurven enthalten. So gehören zum Index 1 die Kreise, zum Index -2 alle Kegelschnitte, zum Index 0 diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsmittelpunkt eines Kurvenpunktes P der Schnittpunkt seiner Normalen mit der Polaren p von P hinsichtlich des Kreises k ist. In diesem Fall $n = 0$ nimmt die natürliche Gleichung die Form an[99]):

$$\varrho^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma,$$

die die *cykloidalen Kurven*, insbesondere die Cykloiden, die Kreisevolventen und die logarithmischen Spiralen definiert (siehe Nr. 8 und Anm. 29, vgl. auch Nr. **3** und Anm. 7).

Im Falle $R = 0$ geht aus (28) die *natürliche Gleichung der Sinusspiralen vom Index n hervor*[100]):

---

97) Fussn. 77, 1894, p. 104; Natürl. Geometrie, p. 54.

98) Natürliche Geometrie, p. 56.

99) Ebenda p. 58. Siehe auch a. a. O. 1888, p. 175—178, wobei *Mennesson*, Mathesis, question 461 (1885), für eine Eigenschaft dieser Kurven citiert wird. Auch *E. Cesàro*, Mathesis 7 (1887), p. 25—38.

100) *E. Cesàro*, Natürl. Geometrie, p. 61.

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}. \tag{29}$$

Ein anderer Grenzfall ist der, dass die Konstante c in (28) nach Null oder Unendlich konvergiert, indem zugleich der Radius R des Direktrixkreises nach Unendlich strebt. Denn es bleibt die natürliche Gleichung (28) nach *E. Cesàro* endlich, wenn man $c^{\frac{2n}{n-1}}$ und R unbegrenzt wachsen lässt und dabei festsetzt:

$$R = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}},$$

wo a eine endliche Konstante sei. Alsdann geht aus (28) die natürliche Gleichung hervor:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}, \tag{30}$$

die also für diejenigen Cesàro'schen Kurven gilt, bei denen der Direktrixkreis in eine Gerade g ausgeartet ist. Alsdann ist die Polare p von P diejenige Parallele zu g, die auf der andern Seite von g wie P, aber in demselben Abstand liegt. Mithin sind diese Kurven durch die Eigenschaft charakterisiert, dass das Verhältnis aus dem Krümmungsradius ϱ zu demjenigen Abschnitt $\frac{v}{2}$ der Normalen, der einerseits vom Kurvenpunkte P und andererseits von der festen Geraden g begrenzt wird, den konstanten Wert $2:(n+1)$ hat. Diese Kurven hat man *Ribaucour'sche Kurven* genannt, obgleich sie schon vor *A. Ribaucour* betrachtet worden sind[101])[102]).

101) Mit Recht heben *E. Wölffing,* Biblioth. math. (3) 1 (1900), p. 142—159, insbes. p. 146, Anm., und *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 522, hervor, dass der Name: Ribaucour'sche Kurven nicht der richtige ist. Einige Litteratur über diese Kurven, zum Teil den genannten Schriften entnommen, sei hier zusammengestellt: *P. Varignon,* Paris Mém. 1710, p. 161; *Joh. I Bernoulli,* Brief an Leibniz 1716 (Leibniz ed. Gerhardt 3, p. 958), auch Opera 2, p. 290—291, *L. Euler,* Petropol. Comment. 10 (1747), p. 164—180; *A. Farcy,* Nouv. Ann. (1) 3 (1844), p. 528—533 (doch nur für einen speziellen Fall); *Parvé,* De curvis funicularibus, Diss. Groningen 1847, p. 88—89; *A. Müller,* Bestimmung der Kurven u. s. w., Diss. Jena 1867; *Weerth,* Über eine Klasse von Kurven u. s. w., Progr. Celle 1874; *E. Dubois,* Nouv. Corresp. math. 6 (1880); *H. Résal,* J. de math. (3) 6 (1880), p. 115—128; *J. Hammond* und *G. Heppel,* Educat. Times 34 (1881), p. 72, 73; *A. Ribaucour,* Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne

Wählt man insbesondere der Index n der Ribaucour'schen Kurven gleich Null, so gehen die Kurven hervor, bei denen der Krümmungsradius von der bis zu einer festen Geraden g gehenden Normalen halbiert wird. Es sind dies die *gemeinen Cykloiden* (vgl. Nr. 9). Ist $n = 1$, so ergeben sich die *Kreise*, deren Mitten auf der festen Geraden liegen, ist $n = -2$, so gehen die *Parabeln* hervor, die die feste Gerade zur Leitlinie haben. Für $n = -3$ ergeben sich diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich dem Normalenabschnitt, gerechnet bis zu einer festen Geraden g, ist. Von diesen Kurven, den *Kettenlinien*, werden wir sogleich sprechen. Vorher sei noch bemerkt, dass *A. Ribaucour* die Ribaucour'schen Kurven, bei denen das Verhältnis $\varrho : \frac{r}{2} = 2 : (n+1)$ eine ganze Zahl ist, in vier Familien eingeteilt hat, deren Typen die vier soeben genannten Kurven sind, und die er daher Kurven von cykloidischer, cirkularer, parabolischer und katenoidischer Art nennt[103]) [104]).

27. Kettenlinien und Traktricen. Die Ribaucour'schen Kurven vom Index $n = -3$, d. h. diejenigen Kurven, bei denen der Krümmungsradius entgegengesetzt gleich demjenigen Abschnitt der Normalen ist, der von dem Kurvenpunkte und einer festen Geraden begrenzt wird, sind die Gleichgewichtskurven, deren Gestalt ein unendlich dünner, durchaus biegsamer homogener Faden unter dem Einfluss

---

nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1881), insbes. Kap. XIV; *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 171—190, insbes. p. 178—181; Natürliche Geometrie, p. 54 u. f.; *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 521—530.

102) *E. Cesàro* hat die Kurven mit der natürlichen Gleichung:

$$s = k \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n - 1}},$$

die die Gleichungen (29) und (30) als spezielle Fälle umfasst, in mehreren Arbeiten studiert: Nouv. Ann. (3) 9 (1890), p. 143—157; El progreso matemático 2 (1892), p. 212—214 (vgl. Fortschr. d. Math. 24, p. 708); Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 102—106; ebenda 19 (1900), p. 489—494; Natürliche Geometrie, p. 76, 77.

103) *A. Ribaucour,* a. a. O. p. 161—164. Näheres über die Ribaucour'schen Kurven findet man bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 521—530.

104) Nach *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 13 (1894), p. 102—106, insbes. p. 104, haben nur die *Evoluten der Ribaucour'schen Kurven* die Eigenschaft, *dass ihre Bogenlänge als Potenz der Abscisse, multipliziert mit einer Konstanten,* ($s = ax^{\mu}$) ausdrückbar ist. Die Kurven, die durch diese letztere Eigenschaft charakterisiert sind, wurden früher von *C. Nies,* Progr. Realgym. Darmstadt 1886, und *Rich. Müller,* Progr. Kgl. Realsch. Berlin 1889, untersucht, aber ohne dass die Identität mit den Evoluten der Ribaucour'schen Kurven bemerkt wurde.

der Schwere allein annimmt, und heissen daher *Kettenlinien*[105]). Ist die feste Gerade (Leitlinie oder Direktrix) die x-Axe, so hat der Krümmungsmittelpunkt eine y-Koordinate, die doppelt so gross als die y-Koordinate des Kurvenpunktes sein muss, so dass sich, wenn der Strich die Differentiation nach der Bogenlänge s ausdrückt, ergiebt:

$$y + \frac{x'^2}{y''} = 2y$$

oder $x'^2 = yy''$. Da $x'^2 + y'^2 = 1$ ist, folgt hieraus:

$$\frac{dyy'}{ds} = 1,$$

also

$$y^2 = s^2 + 2bs + a^2.$$

Bei passender Wahl der Anfangsstelle der Bogenlänge darf einfacher $y = \sqrt{s^2 + a^2}$ gesetzt werden. Dann ist $x' = \sqrt{1 - y'^2}$ leicht zu berechnen, sodass $x = a \log (s + \sqrt{s^2 + a^2}) +$ const. kommt. Wird die y-Axe durch denjenigen Punkt der Kurve gelegt, in dem die Tangente der Leitlinie parallel ist, so kommt:

$$x = a \log \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}, \quad y = \sqrt{s^2 + a^2}, \tag{31}$$

daraus durch Elimination von s:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{32}$$

Alle Kettenlinien sind einander ähnlich und von parabelartiger Gestalt (s. Fig. 14). Ist die y-Axe die Vertikale und zwar positiv nach oben, so stellt (32) die Gleichgewichtsfigur des hängenden Fadens dar. Dabei ist die Bogenlänge s vom tiefsten Punkte der Kurve aus gerechnet. Da die Kettenlinie eine Ribaucour'sche Kurve vom Index $n = -3$ ist, so ist aus (30) in Nr. 26 ihre natürliche Gleichung sofort abzuleiten. Noch bequemer geht sie hervor, wenn man bedenkt, dass der Krüm-

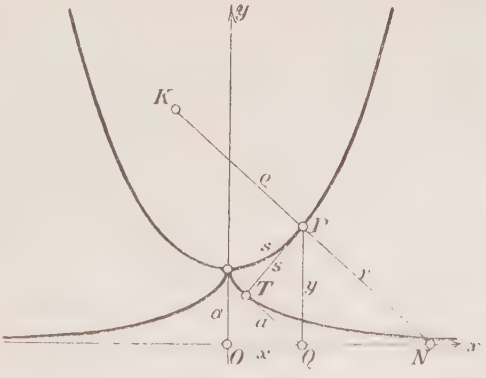

Fig. 14.

105) *Jacob I Bernoulli*, Acta Eruditorum, Mai 1690, auch Opera 1, p. 246, stellte die Frage nach der Gleichgewichtsform des Fadens, die *Galilei* für eine Parabel gehalten hatte. *Huygens, Leibniz* und *Joh. Bernoulli* gaben die Antwort. Geschichtliches siehe bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 574, 575, und IV C, Abschn. III.

mungsradius der bis zur x-Axe gemessenen Normalen ν entgegengesetzt gleich ist. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

also folgt als natürliche Gleichung:

$$\varrho = \frac{s^2 + a^2}{a}.$$

Die Fläche, die zwischen der Kettenlinie, der Leitlinie, der Ordinate des tiefsten Punktes und der zum Bogen s gehörigen Ordinate liegt, ist gleich as.[106]) Trägt man auf der Tangente eines Kurvenpunktes (s) und zwar in der Richtung nach dem tiefsten Punkte hin die Bogenlänge s auf, so ist diese Strecke eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse y ist und dessen andere Kathete nach (31) die konstante Länge a hat. Demnach ist diejenige *Evolvente* [III D 1, 2, Nr. **16**] *der Kettenlinie*, die im tiefsten Punkte der Kurve beginnt, *eine Kurve, deren Tangente, gemessen bis zur x-Axe, eine konstante Länge a hat,* eine sogenannte *Traktrix*[107]).

106) Sonstige Eigenschaften der Kettenlinie (*Seilkurve, Segelkurve, Velaria*) siehe bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 576—578. Unter *Kettenlinie gleichen Widerstandes* (auch *Longitudinale* genannt) versteht man die Gleichgewichtslage eines Fadens unter Einwirkung der Schwere, wenn die Spannung überall der Dicke des Fadens proportional ist. Sie wurde von *G. Coriolis,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 75, 76, bestimmt. Ihre Gleichung ist:

$$e^{\frac{y}{a}} \cos\frac{x}{a} = 1.$$

Ihre natürliche Gleichung ist:

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

siehe *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 5; auch *T. Cifarelli,* Giorn. di mat. 36 (1898), p. 183, 184. Indem man die Ordinaten der Kettenlinie nach konstantem Verhältnis vergrössert oder verkleinert, kommt man zu den *Gewölbelinien,* vgl. *O. Schlömilch,* Übungsbuch z. Stud. der höh. Analysis, 1., 3. Aufl., Leipzig 1878, p. 101; da sie symmetrisch zur y-Axe unter Umständen zwei reelle Stellen mit Maximalkrümmung (Scheitel) haben, so werden sie dann auch *Kettenlinien mit zwei Nasen* genannt. *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 579, citiert hierfür *T. Alexander* und *A. W. Thomson,* Dublin Trans. 29, part. 3, 1888. Die noch allgemeineren Kurven:

$$y = a e^{\frac{x}{c}} + b e^{-\frac{x}{c}}$$

heissen nach *F. Heinzerling,* Zeitschr. f. Bauwesen, 19, 1869, p. 90—110, insb. p. 97, *Klinoiden.* Eine Verallgemeinerung der natürlichen Gleichung der Kettenlinien führte zu den *Pseudokatenarien,* siehe *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 17. Sie sind Evolventen von *Pseudotraktricen* genannten Kurven, ebenda p. 18, 36.

107) Geschichtliches über die Traktrix (*Zuglinie*) siehe bei *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 562—573. Sie wurde zuerst von *Leibniz* als die Kurve bestimmt,

Die *Traktrix* hat also zur Evolute die Kettenlinie. Der zum Punkte (x, y) der Kettenlinie (31) gehörige Punkt der Traktrix hat die rechtwinkligen Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = x - a \sin\tau, \quad \mathfrak{y} = a \cos\tau,$$

wenn τ der Winkel der Tangente der Kettenlinie mit der Leitlinie, also $\operatorname{tg}\tau = s : a$ ist. Aus (31) folgt demnach als Gleichung der Traktrix:

$$\mathfrak{x} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - \mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}} - \sqrt{a^2 - \mathfrak{y}^2}.$$

Die Traktrix hat die Leitlinie der Kettenlinie (die $\mathfrak{x}$-Axe), die auch die Leitlinie der Traktrix heisst, zur Asymptote [III D 1, 2, Nr. 8]. Die Ableitung der Traktrix aus der Kettenlinie zeigt, dass in dem zum Punkte (s) der Kettenlinie gehörigen Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Traktrix der Krümmungsradius der Traktrix gleich s ist, während das Stück der Normalen der Traktrix, das vom Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und der Leitlinie begrenzt wird, auf der andern Seite liegt und absolut gemessen die Länge $a^2 : s$ hat. Demnach ist bei der Traktrix das Produkt aus dem Krümmungsradius ϱ und der Normalen ν, wenn diese bis zur Leitlinie gemessen wird, gleich $-a^2$, wenn wie früher das negative Vorzeichen andeutet, dass ϱ und ν auf verschiedenen Seiten des Kurvenpunktes liegen.

Diese Eigenschaft:

$$\varrho\,\nu = \text{const.}$$

kommt einer ausgedehnteren Familie von Kurven zu, deren Umdrehung um die Leitlinie die Rotationsflächen konstanter positiver oder negativer Krümmung liefert, je nachdem die Konstante positiv oder negativ ist[108]). Diese Kurven entsprechen einander paarweis: Ist bei einer

---

die ein materieller Punkt in der Ebene beschreibt, wenn er durch einen unausdehnbaren Faden von einem Punkte fortgezogen wird, der eine Gerade (die Leitlinie) beschreibt [IV, 11b]. Ersetzt man die Gerade durch eine andere Kurve, so erhält man eine sogenannte *Traktorie*. Der Ort der Punkte, durch die man die Tangenten a der Traktrix nach konstantem Verhältnis teilen kann, heisst *Syntraktrix* nach einem Vorschlag von *J. Sylvester*, vgl. *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. höh. ebenen Kurven, 2. Aufl., Leipzig 1882, p. 378; *M. d'Ocagne*, Nouv. Annales (3) 10 (1891), p. 82—90, insbes. p. 84, 85. Sonstige Verallgemeinerungen der Traktrix, namentlich die *Traktrix complicata*, sind bei *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 566—574, besprochen. — Rollt eine *hyperbolische Spirale* (Nr. 37) auf einer Geraden ab, so beschreibt ihr asymptotischer Punkt eine *Traktrix*, siehe *A. Demoulin*, Bruxelles Mém. in 8°, 44, 7 mars 1891.

108) Sie wurden von *F. Minding*, J. f. Math. 19 (1839), p. 370—387, insbes. p. 379, 380, für negative Werte der Konstante, allgemein von *J. Liouville* in der Note 4 zur 5. Auflage von *Monge*'s Application de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1850, p. 583—600, bestimmt. Über ihre flächentheoretische Anwendung

Kurve $\varrho\nu = a^2$, so giebt es eine Kurve, bei der $\varrho\nu = -a^2$ ist und die jene beständig unter rechtem Winkel schneidet, wie man sie auch längs der Leitlinie verschieben mag[109]). Insbesondere ist die Traktrix mit der konstanten Tangentenlänge a die orthogonale Trajektorie derjenigen Kreise vom Radius a, die ihre Mitten auf der Leitlinie haben[110]).

IV. Transcendente Raumkurven[111]).

28. Charakteristische Eigenschaft der Bertrand'schen Kurven. *B. de Saint-Venant*[112]) warf 1844 die Frage auf, ob es auf der Fläche, die von den Hauptnormalen einer Kurve gebildet wird, eine zweite Linie geben kann, deren Hauptnormalen dieselben Geraden sind, sowie damit zusammenhängende Fragen [III D 1, 2, Nr. **32**; III D 5, Nr. **2**]. Die erste Antwort gab *J. Bertrand* 1850[113]); nach ihm kann man die geradlinigen Flächen in vier Klassen teilen, je nachdem auf einer solchen Fläche keine, eine, zwei oder unendlich viele Kurven liegen, deren Hauptnormalen die Erzeugenden der Fläche sind. Die letzte Klasse besteht aus den gemeinen Schraubenflächen; und hier sind die betreffenden Kurven als orthogonale Trajektorien der Erzeugenden sämtlich gemeine Schraubenlinien (Nr. **20**, vgl. auch Nr. **31**). Von Interesse ist somit nur noch die dritte Flächenklasse, zu der die *Kurvenpare mit gemeinsamen Hauptnormalen* gehören. Diese Paare heissen *Bertrand'sche Kurven.*

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Punktkoordinaten eines Punktes einer Kurve, s die zugehörige Bogenlänge, $1 : \varrho$ die Krümmung, $1 : T$ die Torsion. Ferner seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezw. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die

---

siehe *E. Bour,* J. éc. pol. 39 (1862), p. 1—148, dazu Zeichnungen auf Tafel III. Diskussion der Kurven mit Zeichnungen z. B. bei *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 96—105. Siehe auch *E. Cesàro,* Natürliche Geometrie, p. 30—32, sowie III D 5, Nr. **33**; III D 6a, Nr. **28**. Die in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie auftretende Kurve, als die sich ein Kreis eines schiefen Kreiscylinders beim Abwickeln auf die Ebene darstellt, gehört auch zu denjenigen Kurven, bei denen $\varrho\nu = \text{const.}$ ist, obwohl dies unseres Wissens nirgends erwähnt wird.

109) *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1900, p. 1—8, insbes. p. 3—5.

110) *J. Liouville,* Fussn. 108, p. 599.

111) Einige Raumkurven wurden schon im Anschluss an ebene Kurven in Nr. **20** (räumliche W-Kurven, insbesondere gemeine Schraubenlinien) und Nr. **25** (tetraedral-symmetrische Kurven) besprochen.

112) Mémoire sur les lignes courbes non planes, prés. à l'Ac. 1844, J. éc. polyt. 30, (1845) p. 1—76, insbesondere p. 48 Anm.

113) J. de math. (1) 15, p. 332—250. Ein kleiner Irrtum auf p. 340 wurde von *J. Th. Graves* berichtigt, vgl. *A. H. Curtis,* ebenda (2) 1 (1856), p. 229.

Richtungskosinus der Tangente bezw. Haupt- bezw. Binormale[114]). Eine zweite Kurve, die auf der Fläche der Hauptnormalen der Kurve (x, y, z) verläuft, ergiebt sich allgemein, wenn eine von der Bogenlänge s abhängige Länge m auf der Hauptnormalen der ersten Kurve abgetragen wird, als Ort der Endpunkte mit den Koordinaten:

$$\bar{x} = x + \alpha_2 m, \quad \bar{y} = y + \beta_2 m, \quad \bar{z} = z + \gamma_2 m. \tag{33}$$

Die auf die zweite Kurve bezüglichen Grössen seien wie die auf die erste Kurve bezüglichen Grössen, jedoch überstrichen, bezeichnet. Sollen beide Kurven dieselben Hauptnormalen haben und ist θ der Winkel der Tangenten zusammengehöriger Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ beider Kurven, so kann man

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_3 \sin\theta, \quad \bar{\alpha}_2 = -\varepsilon\alpha_2, \quad \bar{\alpha}_3 = \varepsilon(\alpha_1 \sin\theta - \alpha_3 \cos\theta) \tag{34}$$

ansetzen, wo ε einen der nachher noch auszuwählenden Werte ± 1 hat. Analog drücken sich die $\bar{\beta}$ durch die β und die $\bar{\gamma}$ durch die γ aus. Aus:

$$\cos\theta = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \beta_1\bar{\beta}_1 + \gamma_1\bar{\gamma}_1$$

folgt durch Differentiation nach s, da die Bogenlänge $\bar{s}$ ebenso wie m eine Funktion von s sein wird, vermöge der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**):

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\varrho}(\alpha_2\bar{\alpha}_1 + \beta_2\bar{\beta}_1 + \gamma_2\bar{\gamma}_1) + \frac{1}{\bar{\varrho}}(\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \beta_1\bar{\beta}_2 + \gamma_1\bar{\gamma}_2)\frac{d\bar{s}}{ds}$$

oder nach (34) einfach:

$$\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

d. h. *der Winkel θ der Tangenten entsprechender Punkte zweier Bertrandscher Kurven ist konstant*[115]). Es ist also auch der Winkel entsprechender Binormalen oder Schmiegungsebenen konstant[116]). Aus (33) folgt durch Differentiation nach s, wenn man wieder die Frenet schen Formeln benutzt:

$$\bar{\alpha}_1\frac{d\bar{s}}{ds} = \alpha_1 - m\left(\frac{\alpha_1}{\varrho} - \frac{\alpha_3}{T}\right) + \alpha_2\frac{dm}{ds},$$

---

114) Hier und später benutzen wir im wesentlichen die in III D 1, 2; Nrr. **30**, **31** angewandten Festsetzungen und Bezeichnungen.

115) Satz von *A. H. Curtis*, Fussn. 113, p. 224.

116) Die Relationen (34) und die Folgerung: θ = const. gelten auch, wenn zwei Kurven so punktweise auf einander bezogen sind, dass sie in entsprechenden Punkten *parallele* Hauptnormalen haben. Ferner ergiebt sich dann, dass das Verhältnis aus Krümmung und Torsion bei der einen Kurve eine linear gebrochene Funktion des entsprechenden Verhältnisses bei der andern Kurve mit konstanten Koeffizienten ist; siehe *L. Aoust*, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 368—375.

dazu zwei analoge Formeln. Multipliziert man sie der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1 bezw. α_2, β_2, γ_2 bezw. α_3, β_3, γ_3 und addiert sie jedesmal, so kommt im Hinblick auf (34):

$$\cos\theta\frac{d\bar{s}}{ds}=1-\frac{m}{\varrho},\quad 0=\frac{dm}{ds},\quad \sin\theta\frac{d\bar{s}}{ds}=\frac{m}{T}. \tag{35}$$

Die zweite Gleichung lehrt: *Zwei zusammengehörige Bertrand'sche Kurven schneiden auf ihren gemeinsamen Hauptnormalen eine Strecke von konstanter Länge m ab*[117]. Hiernach und wegen der Konstanz von θ sind längs beider Kurven die aus Tangente, Haupt- und Binormale bestehenden begleitenden Dreikante je zweier entsprechender Punkte *starr* miteinander verbunden. Die erste und dritte Gleichung (35) geben durch einander dividiert:

$$\frac{\sin\theta}{\varrho}+\frac{\cos\theta}{T}=\frac{\sin\theta}{m}. \tag{36}$$

Dies giebt den Satz von *J. Bertrand: Zwei Kurven haben dann und nur dann gemeinsame Hauptnormalen, wenn zwischen der Krümmung und Torsion der einen Kurve eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht.* Die Umkehrung ist nämlich leicht zu beweisen. *Bertrand* hat den Satz a. a. O. synthetisch bewiesen, *J. A. Serret*[118]) gab den ersten analytischen Beweis. Mit den Bertrand'schen Kurven hat sich seitdem eine Reihe von Mathematikern beschäftigt, die verschiedenartige Beweise des Satzes gebracht haben[119]).

---

117) Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve eine konstante Strecke ab und hat die Kurve der Endpunkte die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene mit der entsprechenden Schmiegungsebene der Urkurve einen konstanten Winkel bildet, so sind beide Kurven Bertrand'sche Kurven. Siehe *B. Niewenglowski,* Paris C. R. 85 (1877), p. 394—396.

118) J. de math. (1) 16 (1851), p. 499, 500.

119) Wir können noch folgende Stellen ausser den schon erwähnten nennen: *W. Schell,* Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, Leipzig 1859, p. 74—80 (2. Aufl. 1898, p. 108—115); *P. Serret,* Théorie nouv. géom. et méc. des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 109—117; *E. Laguerre,* Bull. sciences math. astr. 2 (1871), p. 279—282; *A. Mannheim,* J. de math. (2) 17 (1872), p. 406—417; *L. Aoust,* Fussn. 116, 1876, p. 378—381; *A. Mannheim,* Paris C. R. 85 (1877), p. 212—216; *J. A. Serret,* ebenda, p. 307, 308; *A. Fais,* Bologna Rend. 1877/78, p. 25, 26; Bologna Mem. 8 (1878), p. 609—624; *A. Mannheim,* Paris C. R. 86 (1878), p. 1254—1256; Proc. Lond. math. Soc. 16 (1884/85), p. 273—276; *G. Darboux,* Leçons sur la théorie génér. des surfaces, 1. partie, Paris 1887, p. 13—15, 44, 45; 3. partie, Paris 1894, p. 313, 314; *A. Pellet,* Paris C. R. 106 (1888), p. 654; *Ch. Bioche,* ebenda, p. 829, 830; *É. Picard,* Traité d'anal. 1, Paris 1891, p. 368—371; *V. Rouquet,* Toulouse Mém. (9) 4 (1892), p. 241—264; *E. Cesàro,* Rivistà di mat. 2 (1892), p. 153—159; Mathesis (2) 4 (1894), p. 265—268; *H. Molins,* Toulouse Mém. (9) 6 (1894), p. 394—420; *A. Mannheim,* Prin-

Da die Beziehung zwischen zwei zusammengehörigen Bertrandschen Kurven durchaus umkehrbar ist, gibt jede richtige Formel eine neue, wenn man die nicht überstrichenen Buchstaben mit den überstrichenen vertauscht, aber, wie (33) und (34) zeigen, m durch εm und θ durch $\varepsilon\theta$ ersetzt. So gibt die dritte Formel (35):

$$\sin\theta\,\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{m}{\bar{T}}, \tag{37}$$

sodass aus beiden folgt:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\bar{T}} = \frac{\sin^2\theta}{m^2}, \qquad \frac{1}{T}:\frac{1}{\bar{T}} = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2. \tag{38}$$

Das Produkt der Torsionen entsprechender Punkte ist also konstant, wie *W. Schell*[120]) zuerst fand, während das Verhältnis der Torsionen umgekehrt proportional dem Verhältnis der Quadrate der Bogenelemente ist. Beide Kurven haben an entsprechenden Stellen zugleich positive oder zugleich negative Torsionen. Aus der ersten Formel (35) ziehen wir ebenso:

$$\cos\theta\,\frac{ds}{d\bar{s}} = 1 - \frac{\varepsilon m}{\bar{\varrho}},$$

sodass folgt:

$$\left(1 - \frac{m}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon m}{\varrho}\right) = \cos^2\theta.$$

Sind $P, \bar{P}$ einander entsprechende Punkte beider Kurven, K und $\bar{K}$ ihre Krümmungsmittelpunkte, so folgt hieraus, dass das Doppelverhältnis $(P\bar{P}K\bar{K}) = 1 : \cos^2\theta$, also konstant ist, wie *A. Mannheim*[121]) fand.

Aus (36) folgt durch Vertauschen beider Kurven noch:

$$\varepsilon\frac{\sin\theta}{\bar{\varrho}} + \frac{\cos\theta}{\bar{T}} = \frac{\sin\theta}{m}.$$

---

cipes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 364—379, 532—544; *L. Bianchi,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, Leipzig 1899, p. 31—34, 231; *W. de Tannenberg,* Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel, Paris 1899, p. 89, 90; *E. Cesàro,* Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von Kowalewski, Leipzig 1901, p. 186—189. Die von mehreren Autoren zitierte Arbeit von *Voizot,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 481—486, handelt nur von Kurven konstanter Krümmung.

120) Fussn. 119, 1859, p. 78 (1898, p. 110). Dagegen hat *W. Schell* in der 1. Aufl. statt der 2. Formel (38) eine falsche Formel. Vgl. noch *Schell,* Archiv Math. Phys. 5 (1903), p. 4.

121) Siehe Fussn. 119, 1872, p. 413. Bei *W. Schell,* a. a. O., 2. Aufl., p. 111, ein Rechenfehler. Auch bei *L. Aoust,* a. a. O. p. 381, ein Irrtum. Jenes Doppelverhältnis kann nie harmonisch sein, vielmehr liegen im Fall reeller Kurven entweder K und $\bar{K}$ zwischen P und $\bar{P}$ oder beide ausserhalb $P\bar{P}$, wie *Schell* richtig bemerkt.

Aus den aufgestellten Relationen leitet man z. B. ab:

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} = \varepsilon\left(\frac{\sin^2\theta}{m} - \frac{\cos^2\theta}{\varrho - m}\right), \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\varrho - m}\right),$$

woraus leicht eine von *L. Aoust*[122]) angegebene Konstruktion folgt. Entfernt man θ mit Hülfe von (36), so kommt:

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} = \varepsilon\,\frac{\varrho^2 m - T^2(\varrho - m)}{\varrho^2 m^2 + T^2(\varrho - m)^2}. \tag{39}$$

Da die Krümmung positiv sein muss (vgl. III D 1, 2, Nr. **29**), so ist

$$\varepsilon = \pm 1, \text{ je nachdem } m \gtrless \frac{\varrho T^2}{\varrho^2 + T^2}$$

ist. Weiterhin hat *A. Mannheim*[123]) gezeigt, wie man die Schmiegungskugel der zweiten Bertrand'schen Kurve konstruieren kann, sobald man die der ersten kennt, auch hat er einen von *A. Demoulin*[124]) nur für Kurven konstanter Torsion ausgesprochenen Satz auf die Bertrand'schen Kurven verallgemeinert[125]).

29. Endliche Gleichungen der Bertrand'schen Kurven. Zu ihrer Bestimmung geht man von der sphärischen Indikatrix der Binormalen der zugeordneten zweiten Bertrand'schen Kurve aus, d. h. (nach III D 1, 2, Nr. **30**) von derjenigen Kurve, die sich auf der Einheitskugel um den Anfangspunkt ergiebt, wenn man durch den Anfangspunkt die Parallelen zu diesen Binormalen legt und sie mit der Kugel zum Schnitte bringt. Wählt man diese Indikatrix und ebenso die lineare Relation (36), d. h. die Konstanten m und θ, ganz beliebig, so gibt es stets zugehörige Bertrand'sche Kurven.

Es seien nämlich u, v, w die Punktkoordinaten und σ die Bogenlänge der Indikatrix, sodass also u, v, w solche sonst beliebige Funktionen von σ bedeuten sollen, die den beiden Bedingungen

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \tag{40}$$

genügen, wobei der Strich die Differentiation nach σ andeutet. Da

122) Fussn. 119, p. 380.

123) Fussn. 119, in den Proceed. 1884/85.

124) Paris soc. math. Bull. 20 (1892), p. 43—46.

125) In den zitierten Principes et dév., 1894, p. 374, nämlich: Bewegt sich ein aus drei rechtwinkligen Geraden bestehendes Dreikant so längs einer Bertrand'schen Kurve, dass die Geraden beständig in die Tangente, Haupt- und Binormale fallen, so ist der Ort der Axen derjenigen unendlich kleinen Schraubungen, die das Dreikant aus einer Lage in die unendlich benachbarte Lage überführen (vgl. III D 1, 2, Nr. **31**, Anm. 199), relativ zu diesem Dreikant ein Plücker'sches Konoid [III C 9]. — Eine andere Eigenschaft der Bertrand'schen Kurven bei *E. Cesàro*, a. a. O. 1894, p. 265—268, und 1901, p. 188, 189.

u, v, w zugleich die Richtungscosinus $\bar{\alpha}_3$, $\bar{\beta}_3$, $\bar{\gamma}_3$ der Binormale der zweiten Bertrand'schen Kurve sein sollen, so gibt (34):

$$(41)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \sin\theta - \alpha_3 \cos\theta = \varepsilon u, \quad \beta_1 \sin\theta - \beta_3 \cos\theta = \varepsilon v, \\ \gamma_1 \sin\theta - \gamma_3 \cos\theta = \varepsilon w. \end{cases}$$

Das Bogenelement $d\sigma$ ist gleich dem Winkel $d\bar{s} : \bar{T}$ unendlich benachbarter Binormalen, sodass (37) gibt:

$$(42)\qquad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{m}.$$

Werden die Formeln (41) mit Rücksicht hierauf nach s unter Benutzung der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**) differenziert, so kommt wegen (36) einfach:

$$\alpha_2 = \varepsilon u', \quad \beta_2 = \varepsilon v', \quad \gamma_2 = \varepsilon w'.$$

Aus $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ folgt daher:

$$u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 = 0,$$

während (41) nach Multiplikation mit α_1, β_1, γ_1 und Addition gibt:

$$u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = \varepsilon \sin\theta.$$

Da ausserdem:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

ist, so zieht man aus den drei letzten Formeln:

$$\alpha_1 = \varepsilon \sin\theta \cdot u \pm \cos\theta \cdot (vw' - wv')$$

und analoge Werte für β_1 und γ_1. Aus (41) lassen sich alsdann auch α_3, β_3, γ_3 berechnen, während schon $\alpha_2 = \varepsilon u'$ u. s. w. gefunden war. Da die Determinante

$$|\alpha_1 \ \beta_2 \ \gamma_3| = +1$$

sein muss, folgt mit Rücksicht auf (40), dass in dem Wert von α_1 das *obere* Vorzeichen gilt. Wegen (42) ist ferner für den Punkt (x, y, z) der gesuchten ersten Bertrand'schen Kurve:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{dx}{ds} : \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\alpha_1 m}{\sin\theta} = \varepsilon m u + m \operatorname{ctg}\theta \cdot (vw' - wv').$$

Analog gehen die Ableitungen von y und z nach σ hervor, sodass folgt:

$$(43)\qquad \begin{cases} x = \varepsilon m \int u\, d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (vw' - wv')\, d\sigma, \\ y = \varepsilon m \int v\, d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (wu' - uw')\, d\sigma, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ z = \varepsilon m \int w\, d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (uv' - vu')\, d\sigma. \end{cases}$$

Man kann umgekehrt zeigen: Sobald u, v, w drei solche Funktionen von σ sind, die den beiden Gleichungen (40) genügen, und m und θ

irgend zwei Konstante bedeuten, sind dies die endlichen Gleichungen einer Bertrand'schen Kurve, ausgedrückt mittels des Parameters σ, und zwar besteht bei dieser Bertrand'schen Kurve die lineare Relation (36).

Die Formeln (43) hat *G. Darboux*[126]) gegeben. Dagegen schliesst *L. Bianchi*[127]) so: Kann man zwei Kurven punktweis so auf einander beziehen, dass ihre entsprechenden Bogenelemente einander gleich und ihre entsprechenden Hauptnormalen einander parallel sind[128]), so ist die Krümmung der einen Kurve eine ganze lineare Funktion von Krümmung und Torsion der andern. Hat also die eine Kurve konstante Krümmung, so ist die andere eine Bertrand'sche Kurve. Hiernach lässt sich die Bestimmung der endlichen Gleichungen einer Bertrand'schen Kurve auf die der endlichen Gleichungen einer *Kurve konstanter Krümmung* [III D 1, 2, Nr. **32**] zurückführen. Die direkte Bestimmung der letzteren ist einfach (vgl. Anm. 140 zu Nr. **31**).

30. Die Bertrand'schen Kurven in der Flächentheorie. *E. Laguerre*[129]) stellte 1871 den Satz auf: Verbiegt man ein einschaliges Rotationshyperboloid so, dass die eine Schar von Geraden geradlinig bleibt [III D 6 a, Nrr. **22, 23**], so geht der Kehlkreis in eine Bertrand'sche Kurve über. Dass der Satz auch umgekehrt gilt, deutete *Laguerre* kurz an. *Astor*[130]) bemerkte alsdann, dass man die geodätischen Linien gewisser geradliniger Flächen durch Quadraturen bestimmen kann. *A. Pellet*[131]) hob hervor, dass die Striktionslinie einer solchen Fläche eine Bertrand'sche Kurve ist. *Ch. Bioche*[132]) endlich zeigte, dass die fraglichen Flächen gerade diejenigen sind, die in dem Laguerre'schen Satze auftreten, und gab der Umkehrung des Satzes von Laguerre diese präzise Form: Liegen zwei zusammengehörige Bertrand'sche Kurven vor und legt man durch jeden Punkt der einen diejenige Gerade, die zur Binormalen der andern in dem zugeordneten Punkte parallel ist, so bilden die konstruierten Geraden eine Fläche, die sich so zu einem einschaligen Hyperboloid verbiegen lässt, dass ihre Geraden geradlinig bleiben. Nach (43) sind daher:

126) Leçons, 1. partie (1887), p. 45.

127) Differentialgeometrie, p. 32—34.

128) Dies ist eine Weiterführung von Betrachtungen, die von *L. Aoust* herrühren, vgl. Anm. 116.

129) Fussn. 119, p. 281.

130) Assoc. pour l'avanc. des sc. (Toulouse) 1887, p. 1.

131) Fussn. 119, 1888.

132) Fussn. 119, 1888. Siehe auch *G. Darboux,* Leçons, 3. partie, p. 313, 314; *L. Bianchi,* Differentialgeometrie, p. 231.

$$x = \varepsilon m \int u d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (vw' - wv')\, d\sigma + u\tau,$$
$$y = \varepsilon m \int v d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (wu' - uw')\, d\sigma + v\tau,$$
$$z = \varepsilon m \int w d\sigma + m \operatorname{ctg}\theta \int (uv' - vu')\, d\sigma + w\tau$$

die Gleichungen einer allgemeinen derartigen Fläche, ausgedrückt mittels zweier Parameter σ und τ, sobald die Funktionen u, v, w von σ allein den beiden Bedingungen (40) genügen, während m und θ Konstanten sind und $\varepsilon \pm 1$ ist.

V. Rouquet[133]) stellte sich das Problem, diejenige Minimalfläche zu finden, die eine gegebene Bertrand'sche Kurve zur Haupttangentenkurve hat. Er erkannte, dass sie der Ort der Mitten derjenigen Minimalkurve ist, die man erhält, wenn man durch die Punkte einer Bertrand'schen Kurve die Parallelen zu den Binormalen der zugehörigen Kurve in entsprechenden Punkten zieht — also wie bei *Bioche* — und auf ihnen die konstante Länge $\pm mi : \sin\theta$ abträgt, vorausgesetzt natürlich, dass die gegebene Bertrand'sche Kurve der linearen Relation (36) genügt.

31. Kurven konstanter Krümmung, Kurven konstanter Torsion und allgemeine Schraubenlinien. Zu den linearen Relationen zwischen Krümmung $1:\varrho$ und Torsion $1:T$ gehören insbesondere die Gleichungen $1:\varrho = \text{const.}$ und $1:T = \text{const.}$ Demnach gehören die Kurven konstanter Krümmung und die Kurven konstanter Torsion zu den Bertrandschen Kurven.

Hat eine Kurve[134]) die *konstante Krümmung* $1:\varrho$, so ist in der linearen Relation (36)

$$\cos\theta = 0, \quad \varrho = m$$

zu setzen. Letzteres sagt aus, dass die zugehörige zweite Bertrandsche Kurve der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist, ersteres, dass die Tangente und Binormale der zugehörigen Kurve bezw. der Binormale und Tangente der Kurve konstanter Krümmung in entsprechenden Punkten parallel ist[135]). Aus (39) folgt $\bar{\varrho} = \varepsilon\varrho = \varepsilon m$. Natürlich muss $\varepsilon = +1$ sein, da $\bar{\varrho} > 0$ ist. Also ergiebt sich der schon *G. Monge*[136])

133) Fussn. 119, 1892.

134) *E. Cesàro,* Natürl. Geom. 1901, p. 182, nennt die Kurven konstanter Krümmung *windschiefe Kreise.*

135) Über Kurven mit solchen „reziproken" begleitenden Dreikanten siehe *L. Aoust,* Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 376—378.

136) Paris Mém. pour 1784, p. 536 u. f., während man sonst öfters *Bouquet* (mit welcher Arbeit?) dafür citiert findet. Die Art, wie *Monge* die endlichen Gleichungen der Kurven konstanter Krümmung dort bestimmt, ist jedoch falsch. Vgl. *G. Darboux,* Leçons, 1. partie, p. 17 Anm.

bekannte Satz: Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve konstanter Krümmung ist eine Kurve von derselben konstanten Krümmung, d. h. für sie ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte wieder die ursprüngliche Kurve, denn dies erhellt sowohl aus der Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen zwei Bertrand'schen Kurven als auch aus der zweiten Formel (34), da $\varepsilon = +1$ ist. Aus der in III D 1, 2, Nr. **31**, angegebenen Formel für den Radius R der Schmiegungskugel folgt sofort: Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve fällt dann und nur dann mit dem Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte, d. h. mit der Gratlinie der Polarfläche zusammen, wenn die Kurve selbst konstante Krümmung hat[137]). — Breitet man die Tangentenfläche einer Kurve konstanter Krümmung ohne Dehnung auf die Ebene aus, so geht die Kurve in einen Kreis über, weil sich die Krümmung dabei nicht ändert. Um also eine Kurve konstanter Krümmung mechanisch zu erzeugen, legt man zwei völlig biegsame unausdehnbare ebene Blätter aufeinander, befestigt sie längs eines Kreises aneinander und entfernt das Innere des Kreises, auch zieht man einen Schnitt vom Aussenrand nach dem Innern. Biegt man nun die Blätter auseinander, so geht der Kreis in eine Kurve konstanter Krümmung über[138]) [139]). — Die endlichen Gleichungen[140]) einer Kurve konstanter Krümmung $1:\varrho$ sind, sobald die Krümmung nicht gleich Null ist, nach (43), da $\cos\theta = 0$, $m = \varrho$ und $\varepsilon = +1$ ist:

$$x = \varrho\int u\,d\sigma, \qquad y = \varrho\int v\,d\sigma, \qquad z = \varrho\int w\,d\sigma,$$

wo u, v, w solche Funktionen von σ bedeuten, die den beiden Be-

---

137) In Anknüpfung hieran sei das *Aoust'sche Problem* erwähnt: Eine Kurve zu finden, bei der die Gratlinie der Polarfläche der Gratlinie der Polarfläche wieder der Urkurve kongruent ist. Vgl. *L. Aoust,* Paris soc. math. Bull. 7 (1878/79), p. 143—154; Referat *R. Hoppe*'s darüber in den Fortschr. d. Math. 11 (1881), p. 550—552, und Archiv Math. Phys. (1) 66 (1881), p. 386—396; (2) 2 (1885), p. 129—137.

138) Vgl. *W. Schell,* Fussn. 119, 1859, p. 18; 1898, p. 104, 105.

139) Die Sätze über Bertrand'sche Kurven gelten mit entsprechender Spezialisierung ($\cos\theta = 0$, $m = \varrho$) auch für die Kurven konstanter Krümmung. So liefert die erste Formel (38) in Nr. **28** den speziellen Satz: $T\overline{T} = \varrho^2$ für Kurven konstanter Krümmung. Dieser Spezialsatz kommt schon bei *J. Bertrand,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 350 vor. *Voizot,* ebenda, p. 481—486, reklamiert ihn für sich.

140) Sie wurden direkt von *O. Bonnet*, J. éc. polyt. 32 (1848), p. 1—146, insbesondere p. 123, aufgestellt. Siehe auch *J. A. Serret* in *Liouville*'s Note I zu *Monge,* Application de l'analyse à la géométrie, 5. Aufl., Paris 1850, p. 566, 567, und im J. de math. (1) 16 (1851), p. 193—207.

dingungen (40) genügen. Ist jedoch die Krümmung gleich Null, so ist die Kurve eine gerade Linie[141]).

Die *Kurven konstanter Torsion* $1 : T$ wurden zuerst von *J. A. Serret*[142]) betrachtet, der auch ihre endlichen Gleichungen aufstellte. Sie gehören als *Grenzfall* zu den Bertrand'schen Kurven, indem in der linearen Relation (36), Nr. 28, sowohl $\sin\theta = 0$ als auch $m = 0$ zu setzen ist, doch so, dass beim Grenzübergang die Relation einen Sinn behält, d. h. $\operatorname{tg}\theta : m$ von Null verschieden bleibt und die konstante Torsion $1 : T$ darstellt. Die Formeln (43) liefern alsdann, sobald die Torsion nicht gleich Null ist, die endlichen Gleichungen:

$$x = T\int(vw' - wv')\,d\sigma, \quad y = T\int(wu' - uw')\,d\sigma,$$
$$z = T\int(uv' - vu')\,d\sigma,$$

wo u, v, w solche Funktionen von σ bedeuten, die den Gleichungen (40) genügen. Durch eine leichte Abänderung gehen hieraus die Formeln *J. A. Serret*'s hervor[143]). Da $m = 0$ ist, so fällt die zu einer Kurve konstanter Torsion zugehörige Bertrand'sche Kurve mit ihr selbst zusammen. Man kann die Tangentenfläche einer beliebigen Raumkurve so verbiegen, dass sie dabei in die Tangentenfläche einer Kurve konstanter Torsion übergeht[144]). Die Kurven von der Torsion Null sind die ebenen Kurven. — Auf einer Fläche konstanter Krümmung haben die Haupttangentenkurven, wie aus einem noch allgemeineren Satze von *E. Beltrami*[145]) folgt, konstante Torsion, und zwar haben die beiden Scharen entgegengesetzt gleiche Torsion [III D 5, Nr. 35]. Ferner findet man nach *G. Darboux*[146]) diejenigen Flächen, die auf ein Rotationsparaboloid abwickelbar sind [III D 6 a, Nr. 31],

141) Noch seien zu den Kurven konstanter Krümmung erwähnt: *P. Adam,* Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 142—152, und *O. Venske,* Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung, welche sich auf Raumkurven konstanter erster Krümmung beziehen, Gött. Dissert. 1891.

142) In der in Anm. 140 erwähnten Note p. 565, 566.

143) Siehe *G. Darboux,* Leçons, 1. partie, p. 42, 43.

144) Vgl. *W. Schell,* a. a. O., 1898, p. 38.

145) *E. Beltrami* spricht den in Frage stehenden Satz im Giorn. di mat. 4 (1866), p. 123—127, insbes. p. 127, in allem wesentlichen aus, sodass ihm die Priorität vor *A. Enneper,* Göttinger Nachr. 1870, p. 493—510, gebührt, den man sonst stets bei diesem Satze nennt. Vgl. hierzu *G. Loria*, Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 392—440, insbes. p. 401, 402.

146) Leçons, 3. partie, 1894, p. 373. In der 1. partie, 1887, p. 42—46, werden die Kurven konstanter Torsion besprochen, insbesondere auch die, deren sphärische Indikatrix der Tangenten ein sphärischer Kegelschnitt ist. In der 4. partie, 1896, ist die Note IV, p 423—432, wesentlich den Kurven konstanter Torsion gewidmet. Siehe auch 3. partie, p. 314.

durch Verwendung solcher Flächen, die durch Schiebung einer Kurve konstanter Torsion längs einer Kurve von der entgegengesetzt gleichen Torsion entstehen[147]).

Die Annahme $m = \infty$ in der linearen Relation (36), Nr. **28**, giebt einen anderen Grenzfall von Bertrand'schen Kurven, nämlich diejenigen *Kurven, bei denen das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist.* Bei einer solchen Kurve ist die zugeordnete Bertrand'sche Kurve unendlich fern. Ist das konstante Verhältnis

$$\frac{1}{\varrho} : \frac{1}{T} = c,$$

so geben die 1. und 3. Frenet'sche Formel [III D 1, 2, Nr. **31**], durch einander dividiert:

$$\alpha_1 + c\alpha_3 = \text{const.}, \quad \beta_1 + c\beta_3 = \text{const.}, \quad \gamma_1 + c\gamma_3 = \text{const.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit α_1, β_1, γ_1 und addiert sie, so kommt:

$$\text{const. } \alpha_1 + \text{const. } \beta_1 + \text{const. } \gamma_1 = 1.$$

Legt man durch jeden Kurvenpunkt eine Gerade parallel derjenigen Richtung, deren Kosinus den hierin auftretenden Konstanten proportional sind, so folgt, dass die Kurve diese Geraden unter einem konstanten Winkel schneidet. Die Geraden aber bilden einen Cylinder. *Demnach sind die Kurven, bei denen das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist, Schraubenlinien, nämlich Kurven, die alle Erzeugenden eines Cylinders unter konstantem Winkel durchsetzen.* Die Umkehrung dieses Satzes, dass nämlich bei den Schraubenlinien das Verhältnis aus Krümmung und Torsion konstant ist, war schon von *Lancret*[148]) 1802 ausgesprochen worden, und man schreibt jenen Satz *J. Bertrand*[149]) zu, der ihn allerdings 1848, und zwar auf synthetischem

147) Zur Litteratur über Kurven konstanter Torsion, von denen auch die Arbeiten über Bertrand'sche Kurven gelegentlich handeln, nennen wir ausserdem: *P. Serret,* Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 38, 39; *R. Hoppe,* J. f. Math. 60 (1862), p. 182—187, insbesondere p. 185; *A. Fais,* Bol. Mem. (4) 1 (1880), p. 67—97; *G. Königs,* Toul. Ann. 1 (1887), E p. 1—8; *J. Lyon,* Thèse, Paris 1890 (auch Grenoble Ann. 2 (1890), p. 353); *M. Fouché,* Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 335—344; *A. Demoulin,* Par. soc. math. Bull. 20 (1892), p. 43—46 (vgl. Anm. 125); *E. Fabry,* Ann. éc. norm. (3) 9 (1892), p. 177—196; *H. Molins,* Toulouse Mém. (9) 5 (1893), p. 588—603; *E. Cosserat,* Paris C. R. 120 (1895), p. 1252—1254; *E. Cesàro,* Natürl. Geometrie, Leipzig 1901, p. 185. Ein grosser Teil dieser Arbeiten beschäftigt sich ausschliesslich mit *algebraischen* Kurven konstanter Torsion.

148) Mém. sur les courbes à double courbure, Par. Mém. [étr.] 1, 1802 (1805).

149) J. de math. (1) 13 (1848), p. 423, 424.

Wege, bewies. Doch ist er schon von *B. de Saint-Venant*[150]) 1844 ausgesprochen und analytisch bewiesen worden.

Zahlreiche teils synthetische, teils analytische Beweise dieser Sätze finden sich bei späteren Autoren[151]). Natürlich können die Schraubenlinien auch als die *Kurven konstanter Neigung gegen eine Ebene* definiert werden. Wickelt man den Cylinder einer Schraubenlinie auf eine Ebene ab, so geht die Kurve in eine Gerade über. Daher können die Schraubenlinien auch als die *geodätischen Linien der Cylinder* [III D 3, Nr. **14**] definiert werden, ja diese Definition ist die umfassendere, da die andere auf Cylindern von Minimalgeraden versagt, obgleich bei den geodätischen Linien solcher Cylinder das Verhältnis aus Krümmung und Torsion den konstanten Wert $\pm i$ hat[152]) [III D 1, 2, Nr. **32**].

Eine besondere Klasse von Schraubenlinien bilden die *Minimalkurven* (vgl. III D 1, 2, Nr. **12**, sowie unten Nr. **35**), denn bei ihnen ist

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \pm i.$$

Jede Minimalkurve ist also eine Schraubenlinie auf demjenigen Cylinder, durch den sie auf die xy-Ebene projiziert wird. Da die Minimalkurve bei Drehungen stets eine Minimalkurve bleibt, so folgt: *Jede Minimalkurve ist Schraubenlinie auf allen Cylindern, auf denen die*

150) Auch Verf. hat dies in seiner Einf. in d. Th. d. Kurven, Leipzig 1901, p. 224 übersehen. Es sei daher bemerkt, dass *De Saint-Venant* in seinem Mém. sur les lignes courbes non planes, prés. à l'Ac. 1844, J. éc. polyt. 30 (1845), p. 1—76, den Winkel dH konsekutiver rektifizierender Geraden einer Kurve auf p. 26 als Funktion des Verhältnisses von Krümmung und Torsion, multipliziert mit dem Differential dieses Verhältnisses, bestimmt. Auf p. 25 hat er den Winkel H der rektifizierenden Geraden und Tangente ebenfalls durch jenes Verhältnis ausgedrückt. Aus beiden Formeln ergiebt sich der Satz so selbstverständlich, dass sich *De Saint-Venant* auf p. 26 damit begnügt, ihn mit wenigen Worten auszusprechen. — Übrigens gilt der Satz nur mit einer gewissen Einschränkung: Wenn nämlich der senkrechte Querschnitt des Cylinders einen Wendepunkt hat, so geht die Schraubenlinie beim Überschreiten der zugehörigen Mantellinie aus einer rechtsgewundenen in eine linksgewundene oder umgekehrt über, d. h. die Torsion wechselt ihr Vorzeichen, während doch ihre Krümmung wie immer positiv bleibt. Das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion wechselt also dann das Vorzeichen. An der Übergangsstelle selbst ist Krümmung und Torsion gleich Null.

151) So in fast allen über Raumkurven handelnden Lehrbüchern. Ausserdem sei noch erwähnt: *J. A. Serret* in Liouville's Note I zu Monge's Application, 1850, p. 562—564, und im J. de math. (1) 16 (1851), insbes. p. 197, 198; *V. Puiseux*, ebenda, p. 208—211; *L. Natani*, Math. Wörterbuch, 6, Berlin 1867, p. 417; *H. G. Zeuthen*, Tidsskrift f. Math. (3) 5 (1875), p. 182, 183.

152) *G. Scheffers*, Einführ. in d. Theorie d. Kurven, Leipzig 1901, p. 224, 284—289.

Kurve liegt[153]). Ausserdem haben nur die Geraden diese Eigenschaft.

Eine andere besondere Klasse von Schraubenlinien bilden die *gemeinen Schraubenlinien* (siehe Nr. **20**). Sie spielen auch als Bertrandsche Kurven eine besondere Rolle: Da bei ihnen Krümmung und Torsion konstant ist, so giebt es unendlich viele lineare Relationen zwischen Krümmung und Torsion. Auf der Fläche der Hauptnormalen einer gemeinen Schraubenlinie, d. h. auf einer *gemeinen Schraubenfläche* [III D 5, Nr. **5**], liegen also unendlich viele Kurven mit denselben Hauptnormalen, nämlich diejenigen Schraubenlinien, in denen die Fläche durch Rotationscylinder um die Schraubenaxe geschnitten wird. Vgl. die in Nr. **28** eingangs erwähnte vierte Klasse von geradlinigen Flächen.

32. Eigenschaften der allgemeinen Schraubenlinien[154]). Um die Gleichungen einer Schraubenlinie aufzustellen, deren Cylinder *nicht* aus Minimalgeraden besteht[155]), wählen wir die z-Axe parallel zur Cylinderrichtung. Der in der xy-Ebene liegende senkrechte Querschnitt des Cylinders, die *Grundkurve*, sei mittels ihrer Bogenlänge σ gegeben:

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma),$$

sodass

$$x'^2 + y'^2 = 1 \tag{44}$$

ist, wenn hier wie nachher der Strich die Differentiation nach σ andeutet. Ist θ der konstante Winkel, den die Tangente der Schraubenlinie mit der positiven z-Axe bildet, und ist s die Bogenlänge der Schraubenlinie, so ist für den Punkt (x, y, z) der Kurve $dz : ds = \cos\theta$. Da $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ ist, so folgt nach (44), dass $d\sigma : ds = \sin\theta$ ist, wenn s und σ in demselben Sinn positiv genommen werden. Also ist

$$s = \frac{\sigma}{\sin\theta},$$

wenn beide Bogenlängen z. B. von derjenigen Stelle aus gemessen werden,

153) Vgl. *S. Lie* in *Lie-Scheffers,* Geom. d. Berührungstransformationen, **1**, Leipzig 1896, p. 430, wo es allerdings nur implicite gesagt wird; ferner *G. Scheffers,* a. a. O. p. 345. Auf diejenigen Minimalkurven, die auf *Rotations*cylindern Schraubenlinien sind, kommen wir in Nr. **35** zurück.

154) Sie werden in den meisten Lehrbüchern über Raumkurven und über darstellende Geometrie behandelt; wir nennen nur noch, weil darin einige besondere Fragen erörtert werden, die Stellen: *P. Serret,* Théorie nouv. géom. et méc. des lignes, Paris 1860, p. 39, 40, 53, 100—108, 140—142; *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 220—278; *E. Cesàro,* Natürl. Geom., Leipzig 1901, p. 183. Ausserdem kommen die zu Nr. **31** citierten Arbeiten in Betracht.

155) Dieser Ausnahmefall bei *G. Scheffers,* a. a. O. p. 286—289.

an der die Schraubenlinie die Grundkurve trifft. Ferner ist $dz = \operatorname{ctg}\theta\, d\sigma$, sodass

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = \operatorname{ctg}\theta \cdot \sigma \tag{45}$$

die endlichen Gleichungen der Schraubenlinie sind, wobei x und y nur an die Relation (44) gebunden sind. Wird angenommen, dass die Grundkurve in solchem Sinne positiv durchlaufen wird, dass ihre positive Tangente und ihre, nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtete (Haupt-)Normale wie die positive x- und y-Axe zueinander orientiert sind, sodass der Krümmungsradius

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}$$

der Grundkurve positiv gerechnet wird, so sind die Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale der Schraubenlinie (45) diese:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = x' \sin\theta, && \beta_1 = y' \sin\theta, && \gamma_1 = \cos\theta; \\ &\alpha_2 = \bar{\varrho} x'', && \beta_2 = \bar{\varrho} y'', && \gamma_2 = 0; \\ &\alpha_3 = -\bar{\varrho} y'' \cos\theta, && \beta_3 = \bar{\varrho} x'' \cos\theta, && \gamma_3 = \sin\theta, \end{aligned}$$

während

$$\varrho = \frac{\bar{\varrho}}{\sin^2\theta}, \quad T = \frac{\bar{\varrho}}{\sin\theta\cos\theta}$$

ihr Krümmungs- bezw. Torsionsradius ist und also das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion gleich $\operatorname{tg}\theta$ ist.

Die *Tangentenfläche der Schraubenlinie* ist, ausgedrückt mittels σ und eines zweiten Parameters τ:

$$\xi = x + x' \sin\theta \cdot \tau, \quad \eta = y + y' \sin\theta \cdot \tau, \quad \zeta = z + \cos\theta \cdot \tau;$$

sie schneidet die xy-Ebene in der *Evolvente* (vgl. III D 1, 2, Nr. **16**):

$$\xi = x - x'\sigma, \quad \eta = y - y'\sigma, \quad \zeta = 0 \tag{46}$$

der Grundkurve. Die Tangentenfläche ist diejenige abwickelbare Fläche, die von dieser Evolvente unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ aufsteigt, d. h. eine *Böschungsfläche.* Umgekehrt: *Die Gratlinie jeder Böschungsfläche ist eine Schraubenlinie*, und zwar auf demjenigen Cylinder, dessen Grundlinie die Evolute der ebenen Grundlinie der Böschungsfläche ist[156]). Die Evolvente (46) hat, als *Raum*kurve auf-

156) Da eine *Minimalkurve* nach Nr. **31** auf *jeder* Cylinderfläche, die man durch sie legen kann, eine Schraubenlinie ist, so folgt: Die Projektion einer Minimalkurve auf eine *beliebige* Ebene ist die Evolute derjenigen Kurve, in der die Tangenten der Minimalkurve die Ebene treffen. Die Schnittkurven der Tangentenfläche einer Minimalkurve mit einer *beliebigen* Schar von parallelen Ebenen projizieren sich auf eine dieser Ebenen als *Parallelkurven.* Vgl. *S. Lie* in *Lie-Scheffers,* a. a. O. p. 430, 431.

gefasst, unendlich viele Evoluten, für die sie Filarevolvente ist (nach III D 1, 2, Nr. **33**). Zu ihnen gehört die betrachtete Schraubenlinie. Da aber (46) frei von θ ist, so folgt: *Alle Filarevoluten einer ebenen Kurve sind Schraubenlinien* auf demjenigen Cylinder, der über der eigentlichen ebenen Evolute der Kurve senkrecht errichtet werden kann. Umgekehrt: *Ist eine Filarevolvente einer Kurve eben, so ist die Kurve eine Schraubenlinie*[157]).

Die Hauptnormalen einer Schraubenlinie sind Normalen ihres Cylinders. Umgekehrt: Sind die Hauptnormalen einer Kurve einer festen Ebene parallel, so ist die Kurve eine Schraubenlinie[158]). Die Striktionslinie der Fläche der Hauptnormalen hat zur Projektion auf die Ebene der Grundkurve die Evolute der Grundkurve.

Die Krümmung der Schraubenlinie steht in einem konstanten Verhältnis zur Krümmung der Grundkurve. Analoges gilt von den Bogenlängen.

Die Binormalen der Schraubenlinie sind von konstanter Neigung gegen die xy-Ebene, woraus nach III D 1, 2, Nr. **29**, **33** folgt: Die Gratlinie der Polarfläche einer Schraubenlinie ist wieder eine Schraubenlinie.

Die rektifizierende Fläche der Schraubenlinie ist ihr Cylinder (vgl. III D 1, 2, Nr. **29**, Anm. 179). Der Rotationskegel, der seine Spitze in einem Punkte der Schraubenlinie hat und der die Tangentenfläche der Kurve längs der Tangente dieses Punktes oskuliert (siehe III D 1, 2, Nr. **30**, Anm. 188), hat konstante Öffnung; dasselbe gilt von dem Rotationskegel, der seine Spitze in einem Punkte der Schraubenlinie hat und dort die Kurve in dritter Ordnung berührt. Umgekehrt: Hat einer dieser Kegel konstante Öffnung, so ist die Kurve eine Schraubenlinie.

Ausser den *sphärischen Schraubenlinien*, die von *P. Serret* und *E. Cesàro*[159]) untersucht wurden, sind die auf Rotationscylindern ge-

157) Die Kurven, die auf der Tangentenfläche einer Schraubenlinie verlaufen und die Tangenten unter konstantem Winkel schneiden, sind Schraubenlinien, deren Schmiegungsebenen zur Tangentenfläche der Urkurve konstante Neigung haben. Siehe *P. Serret,* Théorie nouv. des lignes à double courb., Paris 1860, p. 140—143; *L. Aoust,* Analyse inf. d. courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 258, 259.

158) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 15 (1850), p. 343. *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 23 (1885), p. 222—229, und *E. Cesàro,* ebenda 24 (1886), p. 46—48, bestimmen diejenigen Schraubenlinien, deren Hauptnormalen eine feste Gerade treffen.

159) *P. Serret,* Théorie géom. et méc. des lignes etc., Paris 1860: Jede Schraubenlinie, die auf einer Kugel liegt, ist eine sphärische Evolvente eines Kreises der Kugel (p. 39). Rollt ein grösster Kreis der Kugel, ohne die Kugel zu

legenen *gemeinen Schraubenlinien*, die in Nr. **20** besprochen wurden, und die *cylindro-konischen Schraubenlinien*, auf die wir in Nr. **34** zurückkommen, besonders zu beachten.

33. Verallgemeinerungen der Bertrand'schen Kurven. Die Bertrand'schen Kurven sind nach Nr. **28** durch eine lineare Relation zwischen Krümmung und Torsion charakterisiert; hieraus ergiebt sich eine naheliegende Verallgemeinerung, indem man irgend eine Relation zwischen Krümmung und Torsion festsetzt. Aber da bei jeder Kurve eine Relation zwischen beiden besteht, so würde dies keine besonderen, sondern allgemeine Kurven liefern. Wohl aber ergiebt sich das Problem, die Kurven mit vorgeschriebener Relation[160]) zu bestimmen.

Giebt man jener Relation spezielle Formen, so ergeben sich spezielle Arten von Kurven. Zu solchen, die als Verallgemeinerungen der Bertrand'schen Kurven aufgefasst werden können, gelangt *A. Demoulin*[161]) so: Er sucht, ausgehend von einer Eigenschaft[162]), die den Bertrand'schen Kurven zukommt, diejenigen Kurven, bei denen sich

---

verlassen, auf einem kleinen Kreis der Kugel ab, sodass seine Punkte *sphärische Cykloiden* beschreiben, so umhüllt er noch einen zweiten dem kleinen Kreis diametral gegenüberliegenden kongruenten Kreis der Kugel. Da der grosse Kreis beständig normal zu den Bewegungsrichtungen seiner Punkte ist, so folgt, dass der zweite kleine Kreis die sphärische Evolute jener Cykloiden ist. *Daher sind jene Cykloiden sphärische Schraubenlinien* (p. 53). Nach *P. Serret* kommen diese Cykloiden als rektifizierbar, aber ohne als Schraubenlinien erkannt worden zu sein, schon bei *Jacob I Bernoulli* und *Clairaut* (Paris Mém. 1732) vor. *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 127—142, insbes. p. 130, 131, zeigt, dass die sphärischen Schraubenlinien bei Abwickelung ihrer Tangentenflächen auf die Ebene in Epi- oder Hypocykloiden übergehen.

160) Ein analoges Problem ergiebt sich, wenn die Relation etwa noch die Bogenlänge oder den Radius der Schmiegungskugel oder drgl. enthält. Wegen dieser Probleme vergleiche: *R. Hoppe*, J. f. Math. 60 (1862), p. 182—187, und 63 (1864), p. 122—140; *H. Molins*, J. de math. (2) 19 (1874), p. 425—451; *L. Aoust*, Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, an vielen Stellen; *R. Hoppe*, Lehrbuch d. anal. Geom., 1, Leipzig (1880), an vielen Stellen; Archiv Math. Phys. (1) 65 (1880), p. 287—305; *S. Lie*, Christiania Videnskabs-Selskabet Forhandlinger 1882, Nr. 10; *H. Molins*, Toulouse Mém. 5 (1883), p. 175—199; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 2 (1885), p. 269—273; *E. Goursat*, Toulouse Ann. 1 (1887) C, p. 1—26; *G. Darboux*, Leçons, 1. partie, Paris 1887, livre 1; *R. Hoppe*, Fortschr. d. Math. 19 (1890), p. 751—753; *R. Hoppe*, Archiv Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 335, 336, und 9 (1890), p. 43—52; *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1900, p. 5—8; und Einführung in d. Th. d. Kurven, Leipzig 1901, 2. Abschn. § 13, 14; *G. Pirondini*, J. f. M. 109 (1892), p. 238—260.

161) Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 8—13.

162) Vgl. Anm. 125.

die Axe der unendlich kleinen Schraubung, die das begleitende Dreikant von Tangente, Haupt- und Binormale in das unendlich benachbarte überführt (vgl. III D 1, 2, Nr. **31**, Anm. 199), in Bezug auf das Dreikant selbst während des Fortschreitens längs der Kurve so ändert, dass sie ein *Plücker'sches Konoid* beschreibt. Jene Axe ist zugleich die Axe derjenigen gemeinen Schraubenlinie, die die Kurve an der betrachteten Stelle in zweiter Ordnung berührt und dieselbe Torsion wie die Kurve dort hat (siehe III D 1, 2, Nr. **30**). Ihre Gleichungen sind, bezogen auf das von jenem Dreikant gebildete Koordinatensystem:

$$\frac{z}{x} = \frac{T}{\varrho}, \quad y = \frac{\varrho T^2}{\varrho^2 + T^2}, \tag{47}$$

wenn ϱ und T Krümmungs- und Torsionsradius bedeuten. Diese Schraubenaxe schneidet die Hauptnormale (jetzt y-Axe) rechtwinklig. Nun ist aber die allgemeine Gleichung eines Plücker'schen Konoids, dessen Geraden die y-Axe treffen, diese:

$$Axz + Bx^2 + Cz^2 + Dy\,(x^2 + z^2) = 0,$$

sodass das Einsetzen der Werte (47) giebt:

$$\frac{A}{\varrho T} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho^2} + \frac{D}{\varrho} = 0. \tag{48}$$

Bei den gesuchten Kurven besteht daher eine solche quadratische Relation zwischen Krümmung und Torsion. Die Annahme $B = 0$ giebt wieder die Bertrand'schen Kurven. Diejenigen Kurven, bei denen $A = 0$ ist, hat *Demoulin* besonders untersucht. Sie werden uns sogleich noch einmal begegnen[163]).

Man kann die Bertrand'schen Kurven noch in anderer Weise verallgemeinern: Da bei zwei Bertrand'schen Kurven die Verbindende zusammengehöriger Punkte als gemeinsame Hauptnormale hinsichtlich der beiden aus Tangente, Haupt- und Binormale bestehenden Dreikante der Punkte dieselbe Lage hat, so kann man mit *A. Demoulin*[164]) allgemeiner fragen, bei welchen Kurvenpaaren mit einander zugeordneten Punkten die Verbindende entsprechender Punkte überhaupt hinsichtlich jedes der beiden Dreikante eine feste Lage hat. Besonders ist der Fall untersucht worden, dass die Verbindende dabei in einer der drei

163) Spezialfälle von (48) kommen auch sonst vor, namentlich der Fall

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2} = \text{const.}$$

bei *A. Mannheim,* Paris C. R. 86 (1878), p. 1254—1256; Principes et dév. de géom., Paris 1894, p. 535, 537; *G. Scheffers,* Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 252, 253, wo ihre endlichen Gleichungen gegeben werden.

164) Paris C. R. 116 (1893), p. 246—249.

Ebenen des ersten Dreikants liegt. Ist die Verbindende eine Normale der ersten und die Binormale der zweiten Kurve, so kommt man wieder zu denjenigen Kurven, die der Relation (48) im Falle $A = 0$ genügen.

E. Cesàro[165]) behandelte die Frage nach denjenigen Kurven, bei denen eine mit dem begleitenden Dreikant fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt [III D 5, Nr. **3**]. Dies trifft zunächst stets ein, wenn die Gerade in der rektifizierenden Ebene liegt und der Tangente parallel ist, ausserdem nur dann noch für andere Geraden, wenn die Kurve einer Gleichung von der Form

$$\frac{A}{\varrho T} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho^2} + \frac{D}{\varrho} + \frac{E}{T} = 0$$

genügt, die (48) als speziellen Fall umfasst.

Auf mehrere andere Kurvenarten, die durch besondere Relationen charakterisiert sind, gehen wir nicht näher ein[166]).

34. Loxodromen. Die allgemeinen Schraubenlinien kann man nach Nr. **31** als diejenigen Kurven definieren, die eine Schar von parallelen Ebenen, nämlich die Ebenen senkrecht zur Cylinderrichtung, unter konstantem Winkel schneiden. Da eine solche Ebenenschar durch eine unendlich ferne Gerade bestimmt ist, so gehören die Schraubenlinien als Spezialfälle zu den *Loxodromen.* Dies sind nämlich diejenigen *Kurven, die ein Büschel von Ebenen unter konstantem Winkel schneiden.*

Eigentlich pflegt man die Loxodromen allerdings anders zu definieren, nämlich als diejenigen Kurven, die auf Rotationsflächen die Meridiankurven oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Breitenkreise unter konstantem Winkel schneiden[167]). Da jedoch die Tan-

165) Natürliche Geometrie, 1901, p. 189—192.

166) Ist $d\tau$ der Winkel unendlich benachbarter Tangenten und $d\vartheta$ der Winkel unendlich benachbarter Binormalen in den Endpunkten eines Bogenelementes ds, so kann man mit *R. Hoppe* (vgl. III D 1, 2, Nr. **30**) den Krümmungswinkel $\tau = \int d\tau$ und den Torsionswinkel $\vartheta = \int d\vartheta$ einführen. Die Kurven, bei denen eine der Relationen:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \text{const.}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4}\vartheta = e^{\tau}, \quad \frac{\tau^2}{\vartheta} = \text{const.}, \quad \frac{\vartheta^2}{a} + \frac{\tau^2}{b} = 1$$

besteht, sind von *R. Hoppe,* J. f. Math. 60 (1862), p. 185, 186, und 63 (1864), p. 131, 132, betrachtet worden. *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 126, nennt die Kurven, bei denen $\tau^2 + \vartheta^2 = \text{const.}$ ist, *courbes cyklides.* Zu ihnen gehören die Filarevolventen zweiter Ordnung der ebenen Kurven. Siehe p. 246 daselbst.

167) Ursprünglich verstand man unter Loxodromen nur die Kurven konstanten Kurses auf der Erdkugel; die Verallgemeinerung auf eine Rotationsfläche lag jedoch wegen der Abweichung der Erdoberfläche von der Kugelgestalt nahe.

genten der Breitenkreise Normalen der Meridianebenen sind, so folgt, dass solche Kurven auch die Meridian*ebenen* unter konstantem Winkel schneiden. Umgekehrt: Schneidet eine Kurve ein Büschel von Ebenen unter konstantem Winkel und lässt man sie um die Axe des Büschels rotieren, so erzeugt sie eine Rotationsfläche, auf der sie alle Meridiankurven unter konstantem Winkel durchsetzt.

Die zuerst gegebene Definition der Loxodromen ist jedoch vorzuziehen, weil sie *von den Rotationsflächen unabhängig* ist, sodass die Loxodromen schon in der eigentlichen Kurventheorie eine selbständige Bedeutung haben[168]). Da die logarithmischen Spiralen in der Ebene (Nr. **16**) die Geraden eines Strahlenbüschels unter konstantem Winkel schneiden, so folgt, *dass die Loxodromen als eine Verallgemeinerung der logarithmischen Spiralen auf den Raum aufzufassen sind.* In der Ebene gehen aus den logarithmischen Spiralen vermöge Transformation durch reziproke Radien diejenigen Kurven hervor, die ein Kreisbüschel unter konstantem Winkel treffen, im Raume aus den Loxodromen diejenigen Kurven, die ein Kugelbüschel unter konstantem Winkel treffen, insbesondere aus den Schraubenlinien diejenigen Kurven, bei denen sich der gemeinsame Kreis des Büschels auf einen Punkt (eigentlich auf ein imaginäres Geradenpaar) reduziert.

Liegt die Axe der Loxodromen, d. h. die Axe des zugehörigen Ebenenbüschels, im Endlichen und ist sie keine Minimalgerade[169]), so kann sie als z-Axe gewählt werden. Ist ε der konstante Winkel, den die Loxodrome mit den Ebenen durch die z-Axe bilden soll, so ist

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \sin\varepsilon \tag{49}$$

diejenige totale Differentialgleichung, deren Integralkurven die zur z-Axe und zum Winkel ε gehörigen Loxodromen sind. Zur Integration führt man statt x und y den Abstand $\mathfrak{r}$ des Punktes (x, y, z) von

168) Wir können keine ältere Stelle angeben, wo die Loxodromen in dieser Weise definiert wären. Sehr nahe kommt dieser von den Rotationsflächen unabhängigen Definition *L. Aoust,* J. de math. (1) **11** (1846), p. 184—192 (insbes. p. 186), indem er hervorhebt, dass gewisse Eigenschaften der Loxodromen von der Gestalt der Fläche unabhängig sind. Obige Definition bei *G. Scheffers,* Leipziger Ber. 1902, p. 363—370.

169) Ist sie eine Minimalgerade, so giebt es dennoch zugehörige *reelle* Loxodromen, deren Bestimmung nur eine Quadratur verlangt. Sie liegen auf Kegeln, deren Querschnitte logarithmische Spiralen sind. Doch hat man diese Kurven bisher nicht betrachtet. Sie sind natürlich auch hinsichtlich der konjugiert imaginären Minimalgerade Loxodromen, gehören daher zu den *Doppelloxodromen,* von denen weiter unten die Rede ist.

der z-Axe und den Winkel θ ein, den $\mathfrak{r}$ mit der xy-Ebene bildet, sodass kommt:

$$\mathfrak{r}d\theta = \sin\varepsilon\sqrt{d\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 d\theta^2 + dz^2}.$$

Wählt man z irgendwie als Funktion von $\mathfrak{r}$:

$$z = f(\mathfrak{r}),$$

so liegt nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathfrak{r}$ und θ vor, die durch Quadratur integrierbar ist:

$$\theta = \operatorname{tg}\varepsilon\int\sqrt{1 + f'(\mathfrak{r})^2}\,\frac{d\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \text{const.} \tag{50}$$

Ist θ die hierdurch bestimmte Funktion von $\mathfrak{r}$, so sind:

$$x = \mathfrak{r}\cos\theta, \quad y = \mathfrak{r}\sin\theta, \quad z = f(\mathfrak{r}) \tag{51}$$

die endlichen Gleichungen der Loxodromen, ausgedrückt mittels des Parameters $\mathfrak{r}$, wobei $f(\mathfrak{r})$ eine beliebig zu wählende Funktion von $\mathfrak{r}$ ist[170]).

Bindet man θ nicht vermöge (50) an $\mathfrak{r}$, betrachtet man vielmehr $\mathfrak{r}$ und θ als unabhängige Veränderliche, so sind die Gleichungen (51) die einer Rotationsfläche, deren Axe die z-Axe ist und deren Meridian durch die Wahl der Funktion $z = f(\mathfrak{r})$ bestimmt wird. Insbesondere also haben wir zugleich diejenigen Loxodromen gefunden, die auf einer gegebenen Rotationsfläche um die z-Axe liegen und mit den Meridiankurven der Fläche den Winkel ε bilden. Die Loxodromen einer Rotationsfläche sind augenscheinlich rektifizierbar, sobald die Meridiankurve rektifizierbar ist, da die Bogen beider in entsprechenden Stücken einander proportional sind[171]).

Die ältesten Untersuchungen über Loxodromen betreffen die der Kugel (Erdkugel) wegen ihres nautischen Interesses[172]). Diese *Kurven konstanten Kurses* oder *sphärischen Loxodromen* haben die Pole der Kugel zu asymptotischen Punkten. Projiziert man die Kugel von einem der Pole aus auf die Äquatorebene (stereographisch) [III A 2; III D 6a,

170) *G. Scheffers* a. a. O. zeigt, dass man die endlichen Gleichungen einer allgemeinen Loxodrome durch Differentiation und Elimination allein (ohne Quadratur) aufstellen kann.

171) Über Analogien zwischen den Loxodromen einer Rotationsfläche und den Geraden der Ebene vgl. *L. Aoust* Fussn. 168, und *P. Serret*, Théorie de lignes à double courb., Paris 1860, p. 124, 125. Nach *Serret* gilt der Satz: Verändert sich ein aus Loxodromen gebildetes Dreieck auf einer Rotationsfläche so, dass die Seiten dabei Loxodromen bleiben und zwei von ihnen durch feste Punkte gehen und dass ausserdem die Ecken ihre zugehörigen Breitenkreise nicht verlassen, so geht auch die dritte Seite durch einen festen Punkt.

172) Zur älteren Geschichte siehe *S. Günther*, Studien zur Geschichte d. math. und physik. Geographie, 6. Heft, Halle 1879, p. 333—407, worüber man bei *H. Brocard*, Bull. sciences math. (2) 3, 1. partie (1879), p. 329—339, ein Referat findet.

Nr. 4], so gehen die Meridiane in Geraden und die sphärischen Loxodromen, weil die Kugel dabei konform abgebildet wird, in *logarithmische Spiralen* über. Dies bemerkte zuerst *E. Halley*[173]). Projiziert man sie von einer andern Stelle aus stereographisch, so gehen die sphärischen Loxodromen in die oben erwähnten Kurven über, die ein Büschel von Kreisen unter konstantem Winkel schneiden[174]). *G. Mercator*[175]) gab 1569 auf seiner berühmten *Seekarte* eine solche konforme Abbildung der Kugel, bei der sich ihre Loxodromen als Geraden darstellen. Ist λ bezw. β die geographische Länge bezw. Breite eines Punktes der Kugel vom Radius Eins, so hat dabei der Bildpunkt die rechtwinkligen Koordinaten[176]):

$$x = \lambda, \quad y = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right).$$

Liegt ein *linearer Komplex* [III C 9, III D 9] vor und ist die z-Axe seine Axe, sodass etwa

$$x\,dy - y\,dx = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot dz \tag{52}$$

für die Richtungen $(dx : dy : dz)$ derjenigen Geraden des Komplexes gilt, die durch den Punkt (x, y, z) gehen, so liegen auf einer Kugel vom Radius Eins, deren Mitte auf der Komplexaxe gelegen ist, wie auf jeder Fläche ∞^1 Kurven, die in jedem Punkte eine der hindurchgehenden Komplexgeraden berühren, und diese Kurven sind nach *J. Plücker*[177]) Loxodromen, die den Winkel ε mit den Ebenen durch die Axe des Komplexes bilden. In der That zieht die Gleichung (52) zusammen mit:

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 1, \quad x\,dx + y\,dy + (z-a)\,dz = 0$$

die Gleichung (49) nach sich.

173) Lond. Trans. für 1695—97, 18, p. 202.

174) *G. Holzmüller,* Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 269—289, insbesondere p. 279 u. f., nennt diese Kurven *logarithmische Doppelspiralen.*

175) *G. Kremer,* genannt *Mercator,* machte über die Konstruktion seiner Karte keine erschöpfenden Mitteilungen. Den mathematischen Ausdruck gab *H. Bond* 1645, den Beweis *Halley* a. a. O. Vgl. *N. Herz,* Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885, p. 114, und die ausführlichen Angaben bei *A. Breusing,* Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe, Leipzig 1892, p. 31—48.

176) Durch ähnliche Vergrösserung erhält man hieraus die allgemeinste konforme Abbildung der Kugel, bei der die Loxodromen in Geraden übergehen, durch projektive Transformation die allgemeinste Abbildung der Kugel überhaupt, bei der die Loxodromen in Geraden übergehen. Die allgemeinste Abbildung der Kugel, bei der die Loxodromen in Kreise übergehen, wurde von *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1898, p. 261—294, insbes. p. 273, 274 bestimmt.

177) Neue Geometrie des Raumes, hrsg. von *F. Klein,* 1. Abt. Leipzig 1868, p. 61 Anm.

Betrachtet man ferner diejenige eingliedrige projektive Gruppe des Raumes, die von einer infinitesimalen projektiven Transformation erzeugt wird [II A 6, Nr. 4], bei der x, y, z die Inkremente

$$(53)\quad \begin{cases} \delta x = (y \sin\varepsilon + xz\cos\varepsilon)\delta t, \quad \delta y = (-x\sin\varepsilon + yz\cos\varepsilon)\delta t, \\ \delta z = (z^2 - 1)\cos\varepsilon\,\delta t \end{cases}$$

erfahren, so erkennt man, dass die Fortschreitungsrichtungen $(\delta x : \delta y : \delta z)$ der Punkte (x, y, z) der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

die Kugel berühren, weil diese Kugelgleichung und die Gleichungen (53) die Gleichung

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$$

nach sich ziehen. Da infolge dieser Gleichungen die Definitionsgleichung (49) der Loxodromen erfüllt ist, so folgt: Bei der vorliegenden Gruppe durchlaufen die Punkte jener Kugel Bahnkurven, die auf der Kugel liegen und Loxodromen sind, deren Axe die z-Axe ist. Demnach sind die sphärischen Loxodromen *W-Kurven* (vgl. Nr. **20**). Dies haben *F. Klein* und *S. Lie*[178]) bemerkt.

Ausser den sphärischen Loxodromen[179]) sind insbesondere die auf Rotationsflächen 2. O. und auf einzelnen Rotationsflächen 4. O., nämlich solchen, die durch Drehung einer Parabel oder eines Kreises entstehen, rechnerisch verfolgt worden; auf die von einzelnen Autoren behandelte Frage nach denjenigen Rotationsflächen, die durch besondere Eigenschaften ihrer Loxodromen charakterisiert sind, gehen wir nicht ein[180]).

---

178) Paris C. R. 70 (1870), p. 1224. Man kann hinzufügen: Von den sonstigen Bahnkurven jener eingliedrigen Gruppe sind nur noch die in den Ebenen $z = \pm 1$ gelegenen Kurven Loxodromen hinsichtlich der z-Axe, nämlich logarithmische Spiralen, deren asymptotische Punkte auf der z-Axe liegen.

179) Ihre geodätische Krümmung [III D 3, Nr. **12**] und ihre Torsion bei *P. Serret,* Théorie des lignes à double courb., Paris 1860, p. 47, 48. Vgl. auch p. 56. Über die sphärischen Loxodromen vgl. auch *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1902, p. 365.

180) Ausser den genannten Arbeiten erwähnen wir noch folgende Schriften, die über allgemeine oder spezielle Loxodromen handeln: *E. W. Grebe,* Archiv Math. Phys. (1) 2 (1842), p. 127—132; *J. R. Boyman,* Archiv Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 337—348; 13 (1849), p. 375—377; *J. A. Grunert,* Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1849; *A. Tissot,* Nouv. ann. (1) 11 (1852), p. 454—457; *J. A. Grunert,* Archiv Math. Phys. (1) 21 (1853), p. 304—314; *W. Plagemann,* ebenda (1) 32 (1859), p. 1—67; *P. Serret,* Fussn. 179, ausserdem p. 4, 39, 101—108, 124, 125; *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1869, p. 459—475; Zeitschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 466—475; *A. Laisant,* Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 573—575; *L. Aoust,* Analyse inf. des courbes dans l'esp., Paris 1876, p. 163, 164, 180—183, 193, 209, 259,

Man kann fragen, welche Kurven in doppelter Weise als Loxodromen aufgefasst werden können, doch scheint man diese *Doppelloxodromen*, zu denen also zwei Axen gehören, nicht allgemein untersucht zu haben. Ist die eine Axe unendlich fern, so führt das Problem zu denjenigen *Loxodromen, die zugleich Schraubenlinien sind.* Wenn dabei die im Endlichen gelegene Axe die unendlich ferne Axe senkrecht kreuzt, so kommt man zu den *Loxodromen des Rotationskegels.* Sie sind nämlich zugleich Schraubenlinien auf solchen Cylindern, die der Kegelaxe parallel laufen und deren senkrechte Querschnitte logarithmische Spiralen liefern, deren asymptotische Punkte auf der Kegelaxe liegen. Sie heissen *cylindro-konische Schraubenlinien.* Bei der Abwickelung ihrer Kegel gehen sie in logarithmische Spiralen über. Dass sie eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften haben[181]), weshalb sie sehr häufig betrachtet worden sind[182]), hat seinen Grund darin, dass *alle*[183]) Bahnkurven einer gewissen eingliedrigen projektiven Gruppe solche Kurven sind, dass sie also zu den *W-Kurven* (Nr. **20**) gehören[184]). Diese eingliedrige Gruppe geht aus einer solchen infini-

---

260; *C. Dina,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 298—310, insb. p. 309; *F. Joachimsthal,* Anwendung d. Diff.- u. Int.-R. auf d. allg. Theorie d. Flächen, 1. Aufl., Leipzig 1872, p. 83, 84 (3. Aufl. 1890, p. 147, 148); *A. Enneper,* Math. Ann. 19 (1882), p. 72—83; *H. Molins,* Toulouse Mém. (8) 7 (1885), p. 293—322; *E. Cesàro,* Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 127—142, insbesondere p. 135—137; *J. Tesař,* Prag Berichte 1886, p. 347—360; *F. August,* Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 154—166; *G. Pirondini,* Giorn. di mat. 27 (1889), p. 168—223, insb. p. 181; Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 165—212, insbes. p. 173, 202; *A. Puchta,* Monatshefte Math. Phys. 1 (1890), p. 443—450; *H. Résal,* Expos. de la théorie des surfaces, Paris 1891, p. 143—147; Paris C. R. 114 (1892), p. 147—152; *F. Cesàro,* Nat. Geom., Leipzig 1901, p. 181—184.

181) *P. Serret,* Fussn. 179, p. 101, charakterisiert sie als Schraubenlinien, bei denen der Krümmungsradius eine lineare Funktion der Bogenlänge ist. Die Striktionslinie der Fläche ihrer Hauptnormalen, ferner der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte und drittens die Gratlinie ihrer Polarfläche sind ebenfalls cylindrokonische Schraubenlinien, deren Kegel dieselbe Axe und Spitze wie der Kegel der Urkurve haben, siehe ebenda p. 105.

182) Von ihnen handelt ein grosser Teil der angegebenen Arbeiten.

183) Sie unterscheiden sich hierdurch wesentlich von den p. 251 erwähnten *W*-Kurven. Denn von den Bahnkurven der daselbst angegebenen Gruppe sind nur gewisse als Loxodromen aufzufassen, nämlich die auf einer Kugel gelegenen (abgesehen von ebenen Kurven). Vgl. Anm. 178. Die ausgezeichneten Eigenschaften der sphärischen Loxodromen sind daher, wie man sagen kann, auf ihre Kugel beschränkt, betreffen also sphärische Konstruktionen, denen man sie unterwerfen kann, während man bei den cylindro-konischen Schraubenlinien zur Entwickelung ihrer Eigenschaften als *W*-Kurven den ganzen Raum zur Verfügung hat.

184) Siehe *Lie-Scheffers,* Vorl. über Differentialgleichungen, Leipzig 1901, p. 244.

tesimalen Transformation hervor, die dem Raume eine unendlich kleine Rotation um eine Axe (z-Axe) verbunden mit einer unendlich kleinen ähnlichen Vergrösserung von einem Punkte der Axe (Anfangspunkt) aus erteilt, bei der also x, y, z Inkremente erhalten von der Form:

$$\delta x = (-ay + bx)\,\delta t, \quad \delta y = (ax + by)\,\delta t, \quad \delta z = bz\delta t,$$

wobei also, wenn $\mathfrak{r}, \theta$ Polarkoordinaten in der xy-Ebene bedeuten (sodass $x = \mathfrak{r}\cos\theta$, $y = \mathfrak{r}\sin\theta$ ist):

$$\delta \mathfrak{r} = b\mathfrak{r}\delta t, \quad \delta\theta = a\delta t, \quad \delta z = bz\delta t.$$

Die Bahnkurven der Gruppe sind nämlich gegeben durch:

$$\mathfrak{r} = \text{const.}\, e^{\frac{b}{a}\theta}, \qquad z = \text{const.}\, e^{\frac{b}{a}\theta}.$$

Dass sie cylindro-konische Schraubenlinien sind, folgt daraus, dass die Gruppe konform ist, jeden Rotationskegel, dessen Spitze der Anfangspunkt und dessen Axe die z-Axe ist, in sich überführt und ebenso jeden solchen Cylinder parallel der z-Axe, dessen Querschnitt in der xy-Ebene eine gewisse logarithmische Spirale mit dem Anfangspunkt als asymptotischem Punkte ist[185]). Ein Grenzfall der cylindro-konischen Schraubenlinien sind die *gemeinen Schraubenlinien* (Nr. **20**).

Eine Verallgemeinerung der cylindro-konischen Schraubenlinien sind diejenigen Kurven auf einem *allgemeinen* Kegel, die alle Mantellinien desselben unter konstantem Winkel durchsetzen[186]). Sie können

185) Deshalb und weil die Gruppe jede Gerade in eine Gerade überführt, sind die in Anm. 181 angegebenen Sätze eine unmittelbare Folge davon, dass die cylindro-konischen Schraubenlinien W-Kurven sind.

186) *E. Cesàro* giebt ihnen den leicht irreführenden Namen: *konische Schraubenlinien* (Natürl. Geom. p. 181). *P. Serret,* Théorie nouv. etc., p. 102, 103, und *E. Cesàro,* Nat. Geom., p. 184, haben den falschen Satz, dass diejenigen unter diesen Kurven, die zugleich Schraubenlinien im gewöhnlichen Sinne sind, cylindro-konische Schraubenlinien seien. Vielmehr liegen auf jeder Fläche 2. O., die durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Hauptaxe entsteht, Kurven, die einerseits die von einem Brennpunkt ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel schneiden und andererseits mit der Richtung der Rotationsaxe einen konstanten Winkel bilden. Diese Kurven schneiden zugleich die von dem anderen Brennpunkt ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel. Sie gehören also in *doppelter* Weise zu den im Text genannten Kurven und sind Schraubenlinien. Da der Cylinder der Schraubenlinien als Kegel aufgefasst werden kann, sind dies also Kurven, die zugleich auf *drei* Kegeln liegen und die Mantellinien jedes dieser drei Kegel unter einem konstanten Winkel schneiden. Ist die Rotationsfläche 2. O. ein Rotationskegel, so kommt man zu cylindro-konischen Schraubenlinien. Siehe *G. Pirondini,* J. f. Math. 118 (1897), p. 61—73; *G. Scheffers,* Leipz. Ber. 1902, p. 369, 370. Nach *E. Cesàro* lässt sich

auch als diejenigen Kurven definiert werden, die eine Schar von konzentrischen Kugeln unter konstantem Winkel durchsetzen, also ein gewisses Kugelbüschel, weshalb sie sich den früher erwähnten Kurven unterordnen, die aus Loxodromen durch Transformation durch reziproke Radien hervorgehen, freilich nur, wenn man auch imaginäre Transformationen gestattet.

35. Minimalkurven und Kurven der tetraedralen Komplexe. Die imaginären Kurven von der Länge Null, die sogen. *Minimalkurven*, die durch die totale Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

definiert sind, wurden schon in III D 1, 2, Nrr. **12**, **13**, allgemein besprochen, sodass nur die Erwähnung einiger Einzelheiten nötig ist[187]).

Da man bei einer Minimalkurve von Bogenlänge, Krümmung und Torsion nicht sprechen kann, so haben sie gegenüber allen Bewegungen des Raumes andere Differentialinvarianten als die sonstigen Kurven (vgl. III D 1, 2, Nr. **14**). Sind wie in III D 1, 2, Nr. **13**:

$$(54) \qquad \begin{cases} x = (1-\tau^2)f''(\tau) + 2\tau f'(\tau) - 2f(\tau), \\ y = i(1+\tau^2)f''(\tau) - 2i\tau f'(\tau) + 2if(\tau), \\ z = 2\tau f''(\tau) - 2f'(\tau) \end{cases}$$

die endlichen Gleichungen einer Minimalkurve, so ist

$$(55) \qquad (1-\tau^2)\mathfrak{x} + i(1+\tau^2)\mathfrak{y} + 2\tau\mathfrak{z} = -4f(\tau)$$

die Gleichung ihrer Schmiegungsebene im Punkte (τ), und ihre Tangente im Punkte (τ) erfüllt ausserdem die durch Differentiation nach τ hieraus hervorgehende Gleichung:

$$(56) \qquad \tau\mathfrak{x} - i\tau\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = 2f'(\tau).$$

Sie ist eine Minimalgerade. In dem Punkt, in dem sie den unendlich fernen imaginären Kugelkreis [III C 4] trifft, berührt die Schmiegungs-

---

dies verallgemeinern, indem an die Stelle der Rotationsfläche 2. O. die Fläche tritt, die durch Drehung eines Cartesischen Ovals [III C 3] um die Gerade seiner drei Brennpunkte hervorgeht. Siehe Napoli Rend. 1903, fasc. 3, p. 1—17.

187) Zur Geschichte der Minimalkurven vgl. *P. Stäckel*, Leipziger Berichte 1902, p. 101—108, wo viele Stellen erwähnt werden, an denen die *Formeln* über Minimalkurven auftreten. Mit diesen Gebilden, als *Kurven* aufgefasst, hat erst *S. Lie* synthetisch und analytisch operiert, z. B. in den Paris. C. R. 71 (1870), p. 579—583, und vielen seiner späteren Arbeiten. Es sei angemerkt, dass *J. Bertrand* in seinem Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, 1, Paris 1864, p. 657, zwar das Wort Minimalkurve (ligne minima) hat, darunter aber eine geodätische Linie versteht.

ebene (55) den Kugelkreis. Der Berührungspunkt ist durch die Angabe von τ allein festgelegt, die Schmiegungsebene (55) durch die Angabe von τ und f und endlich die Tangente nach (55), (56) durch die Angabe von τ, f, f'. Demnach kann mit *S. Lie*[188]) τ als Koordinate der ∞^1 Punkte des Kugelkreises, können ferner τ, f als Koordinaten der ∞^2 Tangentialebenen des Kugelkreises, endlich τ, f, f' als Koordinaten der ∞^3 Tangenten aller Minimalkurven, d. h. als Koordinaten der Minimalgeraden aufgefasst werden. Da bei einer Bewegung jede Tangentialebene des Kugelkreises in eine ebensolche übergeht [IV 3, Nr. 1], so gehört zur Gruppe aller Bewegungen des Raumes eine Gruppe in den Veränderlichen τ und f.[189]) Sie besteht aus ∞^6 Transformationen, und ihre Differentialinvarianten niedrigster Ordnung sind[190]):

$$J_5 = \frac{4f'''f^V - 5f^{IV^2}}{f'''^3},$$

$$J_6 = \frac{1}{\sqrt{f'''}}\frac{dJ_5}{d\tau} = \frac{4f'''^2f^{VI} - 18f'''f^{IV}f^V + 15f^{IV^3}}{\sqrt{f'''^9}},$$

während

$$J_7 = \frac{dJ_6}{d\tau} : \frac{dJ_5}{d\tau}, \quad J_8 = \frac{dJ_7}{d\tau} : \frac{dJ_6}{d\tau}, \ldots$$

ihre übrigen Differentialinvarianten sind. Die niedrigste, J_5, ist nach *G. Scheffers* gleich dem achtfachen reziproken Wert des Radius desjenigen Rotationscylinders, der die Minimalkurve an der betrachteten Stelle vierpunktig berührt.

Zwei Minimalkurven, die keine Geraden sind, sind nach *S. Lie*[191]) miteinander kongruent, wenn entweder bei beiden dieselbe Relation zwischen J_5 und J_6 besteht oder wenn bei beiden J_5 denselben konstanten Wert hat. Eine besondere Rolle spielen demnach — wie die gemeinen Schraubenlinien in der Schar aller übrigen Kurven — diejenigen Minimalkurven, bei denen J_5 konstant ist. Ist zunächst $J_5 = 0$, so handelt es sich um alle diejenigen ∞^5 Kurven 3. O., die Minimalkurven sind. Ist dagegen J_5 gleich einer von Null verschiedenen Konstante c, so liegen solche Minimalkurven vor, die alle mit einer kongruent sind, die sich so darstellen lässt:

$$x = \frac{8}{c}\cos t, \quad y = \frac{8}{c}\sin t, \quad z = \frac{8i}{c}\cdot t,$$

woraus hervorgeht, dass diese Kurven auf Rotationscylindern vom

188) Siehe *Lie-Scheffers*, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893, p. 696, 697.

189) *S. Lie*, Leipziger Berichte 1893, p. 370—378, insbes. vgl. hierzu p. 377 unten.

190) *S. Lie* in *Lie-Scheffers* a. a. O. p. 702.

191) Ebenda p. 704.

Radius $8 : c$ liegen, und dass sie bei der Abwickelung ihrer Cylinder in Geraden übergehen, weshalb sie als *Minimalschraubenlinien auf Rotationscylindern*[192]) zu bezeichnen sind. Wir bemerkten schon in Nr. **31**, dass überhaupt jede Minimalkurve als Schraubenlinie aufgefasst werden kann.

Die Minimalkurven sind definierbar als diejenigen Kurven, deren Tangenten einem gewissen Linienkomplex zweiten Grades angehören, nämlich dem Komplex aller Minimalgeraden, d. h. aller Geraden, die den Kugelkreis treffen. (Vgl. III C 9; III D 1, 2, Nr. **12**.)

Liegt überhaupt irgend ein Linienkomplex vor, so kann man diejenigen Kurven betrachten, deren Tangenten sämtlich dem Komplex angehören. Sie heissen nach *J. Plücker*[193]) *Komplexkurven* [III C 9]. Ihre allgemeine Besprechung gehört nicht hierher; wir erwähnen nur einen besonderen Fall, der in naher Beziehung zu den Minimalkurven steht und in dem sich die Komplexkurven geometrisch sehr einfach definieren lassen.

Es giebt ∞^3 Geraden, die ein gegebenes Tetraeder in einem gegebenen Doppelverhältnis Δ schneiden. Der von ihnen gebildete Komplex heisst ein tetraedraler Komplex[194]). Die zugehörigen Kurven sind also diejenigen *Kurven, deren Tangenten ein gegebenes Tetraeder in einem gegebenen Doppelverhältnis* Δ *schneiden*[195]). Durch projektive Transformation gehen die zu einem Tetraeder gehörigen Kurven mit dem Doppelverhältnis Δ in diejenigen Kurven über, die zu dem transformierten Tetraeder und zu demselben Doppelverhältnis Δ gehören. Insbesondere kann man das Tetraeder durch eine projektive Transformation, die ja das Doppelverhältnis ungeändert lässt, in das der drei Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene über-

---

192) Ebenda p. 707.

193) Neue Geometrie des Raumes u. s. w., 1. Abt., hrsg. von F. Klein, Leipzig 1868, p. 61, 158, 193.

194) Er wurde zuerst von *J. Binet*, J. de l'éc. pol. 16 (1813), p. 41—67, als der Inbegriff aller Trägheitsaxen eines festen Körpers betrachtet [IV 3, Nr. 5]. *M. Chasles*, *Th. Reye* und *S. Lie* fanden später andere Definitionen dieses Komplexes. Insbesondere rührt die im Text gegebene aus einem Satze von *H. Müller*, Math. Ann. 1 (1869), p. 407—423, insb. p. 414, in Verbindung mit einem Satze von *K. G. Chr. v. Staudt*, Beiträge zur Geom. d. Lage, 1, Nürnberg 1856, p. 21, her. Vgl. die geschichtlichen Anmerkungen in *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransformationen, 1, Leipzig 1896, p. 320—326.

195) *Allgemein* wurden diese Kurven namentlich von *S. Lie* untersucht, vgl. Göttinger Nachr. 1870, p. 53—66, sowie viele spätere Arbeiten, zusammengefasst in *Lie-Scheffers*, Geom. d. Berührungstransformationen, p. 326 u. f., wo man auch die Litteratur findet.

führen. Ist alsdann (x, y, z) ein Punkt einer zugehörigen Kurve, so sind die Inkremente dx, dy, dz an die Bedingung geknüpft:

$$\frac{(x\,dz - z\,dx)\,dy}{(y\,dz - z\,dy)\,dx} = \Delta. \tag{57}$$

Man bemerkt, dass jede Gleichung von der symmetrischen Form:

$$(b-c)\,x\,dy\,dz + (c-a)\,y\,dz\,dx + (a-b)\,z\,dx\,dy = 0 \tag{58}$$

auf die Form (57) gebracht werden kann, indem hier von den drei Konstanten a, b, c nur eine wesentlich ist. Es kommt eben nur auf den Wert

$$\Delta = \frac{a-c}{b-c}$$

an, der das zugehörige Doppelverhältnis angiebt. Die endlichen Gleichungen der durch (58) definierten Kurven eines tetraedralen Komplexes findet man so: Ist längs einer Kurve zunächst der Ausdruck

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y}$$

nicht konstant, so kann ein längs der Kurve veränderlicher Parameter t durch:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t}$$

definiert werden. Alsdann giebt (58):

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t} : \frac{1}{c+t}.$$

Ist also $f(t)$ eine beliebig gewählte Funktion von t, so sind:

$$x = c^{\int \frac{f(t)}{a+t}\,dt}, \quad y = c^{\int \frac{f(t)}{b+t}\,dt}, \quad z = c^{\int \frac{f(t)}{c+t}\,dt} \tag{59}$$

die *endlichen Gleichungen einer Kurve des tetraedralen Komplexes*[196]). Wenn aber jener Ausdruck längs der Kurve konstant ist, so sind längs der Kurve nach (58) alle Verhältnisse

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z}$$

konstant, sodass man setzen darf:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma},$$

wenn α, β, γ drei Konstanten sind, die wegen (58) an die Relation

$$(b-c)\,\alpha + (c-a)\,\beta + (a-b)\,\gamma = 0 \tag{60}$$

gebunden sind. Alsdann aber ergiebt sich sofort, dass die gesuchten Kurven so dargestellt werden können:

$$x^\alpha = At, \quad y^\beta = Bt, \quad z^\gamma = Ct,$$

196) *S. Lie*, z. B. in der Geom. d. Bertrf. 1, p. 327.

wo A, B, C beliebige Konstanten sind. *Diese Kurven treten also zu den Kurven* (59) *hinzu.* Dabei sind α, β, γ nur an die Relation (60) gebunden. Diese Kurven sind diejenigen Kurven des tetraedralen Komplexes, die eine infinitesimale projektive Transformation gestatten, bei der das Tetraeder invariant bleibt. Sie sind daher *W-Kurven* (vgl. Nr. **20**)[197]).

Setzt man in (59) insbesondere[198]):

$$f(t) = \frac{1}{n},$$

wo n eine Konstante bedeutet, so gehen die besonderen Kurven des tetraedralen Komplexes hervor:

$$x^n = \text{const.}\,(a+t), \quad y^n = \text{const.}\,(b+t), \quad z^n = \text{const.}\,(c+t).$$

Eliminiert man den Parameter t, so kommt man zu zwei Gleichungen von der Form:

$$A_1 x^n + B_1 y^n + C_1 z^n + D_1 = 0, \quad A_2 x^n + B_2 y^n + C_2 z^n + D_2 = 0,$$

deren Koeffizienten konstant sind. Alsdann also sind die Kurven nach Nr. **25** *tetraedral-symmetrische Kurven*[199]).

Zwischen den Minimalkurven und den Kurven eines tetraedralen Komplexes besteht, wie gesagt, ein Zusammenhang: Bildet man nämlich nach *S. Lie*[200]) den Raum (x, y, z) der tetraedralen Kurven (59) auf einen andern Raum $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vermöge der Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

logarithmisch ab, so geht die Differentialgleichung (58) über in:

$$(61) \qquad (b-c)\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + (c-a)\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{x} + (a-b)\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = 0.$$

Die Kurven, die dieser Gleichung genügen, haben überall Fortschreitungsrichtungen $(d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z})$, die den Mantellinien des Kegels zweiter Ordnung:

$$(b-c)\,\mathfrak{y}\mathfrak{z} + (c-a)\,\mathfrak{z}\mathfrak{x} + (a-b)\,\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$$

parallel sind. Da es ∞^3 Geraden giebt, die den Mantellinien parallel sind, so sind die Kurven die *Komplexkurven desjenigen Linienkomplexes, der aus allen Geraden besteht, die die unendlich ferne Ebene in den*

197) Fussn. 196, p. 328. In seiner in Anm. 64 genannten Arbeit von 1870 hatte *S. Lie* diese Kurven noch nicht bemerkt.

198) A. a. O. p. 332, 333.

199) Dass die Tangenten tetraedral-symmetrischer Kurven das Tetraeder in einem konstanten Doppelverhältnis schneiden, hatte *J. de la Gournerie*, siehe Anm. 91, selbst schon erkannt.

200) Geom. d. Berührungstranformationen p. 356. Schon früher, z. B. Archiv for Math. og Naturv. 4 (1880), p. 477—506.

Punkten eines Kegelschnittes treffen. Durch eine *lineare* Transformation lässt sich weiterhin dieser Kegelschnitt in den *Kugelkreis* überführen.

Also folgt: Vermöge einer logarithmischen und darauf erfolgenden linearen Abbildung gehen die tetraedralen Kurven, die zu einem gegebenen Tetraeder und zu einem gegebenen Doppelverhältnis gehören, in die *Minimalkurven* über.

Hiernach lassen sich mithin auch die endlichen Gleichungen (59) ebenso wie die endlichen Gleichungen der Minimalkurven (vgl. III D 1,2, Nr. **13**) von Integralzeichen befreien. In der That, setzt man:

$$\frac{f(t)}{(a+t)(b+t)(c+t)} = F'''(t),$$

so gehen die Gleichungen (59) über in:

$$x = e^{2F(t) - (b+c+2t)F'(t) + (b+t)(c+t)F''(t)},$$
$$y = e^{2F(t) - (c+a+2t)F'(t) + (c+t)(a+t)F''(t)},$$
$$z = e^{2F(t) - (a+b+2t)F'(t) + (a+t)(b+t)F''(t)}.$$

Unter den tetraedralen Kurven sind übrigens wichtige algebraische Kurven enthalten, auf die wir aber hier nicht einzugehen haben.

36. Gemeinsame Eigenschaften einiger Kurvenfamilien. Die Schraubenlinien, die den Winkel θ mit der positiven z-Axe bilden (Nr. **32**), sind durch die Gleichung:

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \cos\theta$$

oder:

$$dx^2 + dy^2 - \operatorname{tg}^2\theta\, dz^2 = 0 \tag{62}$$

definiert, die Loxodromen, die den Winkel ε mit den Ebenen durch die z-Axe bilden, durch die Gleichung (49) in Nr. **34** oder:

$$(xdy - ydx)^2 - \sin^2\varepsilon\,(x^2+y^2)(dx^2+dy^2+dz^2) = 0, \tag{63}$$

die Minimalkurven (Nr. **35**) durch die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{64}$$

und die Kurven des tetraedralen Komplexes durch die Gleichung (58) in Nr. **35**:

$$(b-c)xdydz + (c-a)ydzdx + (a-b)zdxdy = 0. \tag{65}$$

Diese vier Gleichungen ordnen sich der gemeinsamen Form unter [201]):

201) Auch die in Nr. **34** zum Schluss erwähnten Kurven, die mit den von einem festen Punkte ausgehenden Radienvektoren einen konstanten Winkel bilden,

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{66}$$

die in dx, dy, dz homogen sein soll. Eine solche totale Differentialgleichung heisst nach *S. Lie*[202]) eine *Monge'sche Gleichung* [II A 5, Nr. **32**]. Sie ordnet jedem Punkte (x, y, z) einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ der hindurchgehenden Integralkurven zu, der im Falle der vier angegebenen Familien von Kurven insbesondere vom *2. Grade* ist. Sehen wir von den Minimalkurven ab, so können wir längs einer Integralkurve x, y, z als Funktionen der Bogenlänge s auffassen. Sind dann wie früher $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale, $1:\varrho$ und $1:T$ Krümmung und Torsion einer Integralkurve im Punkte (x, y, z), so ist nach (66):

$$\Omega(x, y, z, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0.$$

Differentiation nach s liefert vermöge der Frenet'schen Formeln (III D 1, 2, Nr. **31**):

$$\Omega_x\alpha_1 + \Omega_y\beta_1 + \Omega_z\gamma_1 + \frac{1}{\varrho}(\Omega_{\alpha_1}\alpha_2 + \Omega_{\beta_1}\beta_2 + \Omega_{\gamma_1}\gamma_2) = 0.$$

Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Krümmungsmittelpunkt des betrachteten Kurvenpunktes, sodass

$$\mathfrak{x} = x + \varrho\alpha_2, \quad \mathfrak{y} = y + \varrho\beta_2, \quad \mathfrak{z} = z + \varrho\gamma_2$$

und

$$\varrho^2 = (\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2$$

ist, so folgt hieraus durch Elimination von $\varrho, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$$\begin{aligned}(\Omega_x\alpha_1 + \Omega_y\beta_1 + \Omega_z\gamma_1)\{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2\} \\ + \Omega_{\alpha_1}(\mathfrak{x} - x) + \Omega_{\beta_1}(\mathfrak{y} - y) + \Omega_{\gamma_1}(\mathfrak{z} - z) = 0.\end{aligned}$$

Wegen der Form dieser Gleichung hinsichtlich $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ liest man aus ihr den Satz von *S. Lie*[203]) ab:

Diejenigen Krümmungsmittelpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, *die zu einem bestimmten Punkte* (x, y, z) *und zu allen denjenigen Integralkurven durch diesen Punkt gehören, die daselbst eine gemeinsame Tangente* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *haben, liegen auf einem Kreise,* dessen Ebene natürlich zu der gemeinsamen Tangente senkrecht ist und der durch den betrachteten Punkt (x, y, z) geht.

ordnen sich durch ihre analytische Definitionsgleichung der Form (66) unter, wie überhaupt die Kurven, die ein Büschel von Kugeln unter konstantem Winkel schneiden.

202) Geom. d. Bertrf. p. 249.

203) Leipziger Berichte 1898, p. 1, 2, wo er diesen Satz als eine Ausdehnung des *Meusnier*'schen Satzes für Kurven auf Flächen (vgl. III D 1, 2, Nr. **35**; III D 3, Nr. **1**) bezeichnet. Angedeutet schon in den Leipziger Berichten 1896, p. 412 Anm.

Insbesondere gilt dieser Satz für alle Loxodromen, die die Ebenen eines Büschels unter demselben Winkel schneiden, *ferner für alle Schraubenlinien*, die gleiche Neigung gegen eine feste Ebene haben, *und für alle Kurven eines tetraedralen Komplexes.*

Die Schmiegungsebene eines Punktes (x, y, z) ist nach *S. Lie*[204]) nur dann stets die Tangentialebene des zugeordneten Kegels von Fortschreitungsrichtungen längs der Tangente der Integralkurve, wenn die Monge'sche Gleichung (66) die speziellere Form

$$\Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

hat. Alsdann hat sie insbesondere ∞^3 geradlinige Integralkurven, d. h. dann handelt es sich um *Komplexkurven* (vgl. Nr. **35**). Diesem Fall ordnen sich die *Minimalkurven* und die *Kurven eines tetraedralen Komplexes* unter[205]).

V. Sonstiges.

37. Aufzählung einiger nicht-besprochenen transcendenten Kurven. Aus dem Altertum stammt die *Quadratrix* des *Dinostratus* $\left(y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r}\right)$, angewandt zur Quadratur des Kreises. Zu demselben Zweck sind auch andere *Quadratrixkurven* ersonnen worden[206]). Dazu gehört die *Tschirnhaus*'sche *Quadratrix*, die affin ist zur *Sinuslinie* $y = \sin x$, die *Ozanam*'sche *Kurve*, die affin ist zur Kurve $y = \sin^2 x$, und die von *C. Falkenburg*[207]) als *Kochleoide* bezeichnete Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten $\mathfrak{r}, \theta$ ist: $\mathfrak{r}\,\theta = \text{const.} \sin\theta$, die aber schon aus älterer Zeit stammt. Die Sinuslinie und die Kochleoide lassen sich durch Projektion gemeiner Schraubenlinien (Nr. **20**) erzeugen wie auch die Cykloiden mit gerader Polbahn (Nr. **6**). Die Bedeutung der Sinuslinie sowie der durch *Superposition mehrerer*

---

204) Geom. d. Bertrf. p. 305.

205) Für Komplexkurven ist von *S. Lie*, Christiania Videnskabs-Selskabet Forhandlinger 1883, p. 20, ein falscher Satz betr. ihre *Torsion* ausgesprochen und in *Lie-Scheffers* a. a. O. mit fehlerhaftem Beweise p. 308 wiedergegeben worden. Denselben falschen Satz findet man auch bei *A. Demoulin*, Paris C. R. 115 (1892), p. 282, und Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle, Brüssel u. Paris 1894, p. 57. Jedoch erkannte *Demoulin* in den Pariser C. R. 124 (1897), p. 1077, den Fehler. Vgl. auch *K. Zindler*, Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 30 Anm.

206) Siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 410—416. Wir fügen zu seinen Citaten hinzu: *G. Fouret*, Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 39—43.

207) Zu *G. Loria's* Citaten sei noch hinzugefügt: *A. Bentheim*, Nieuw Archiv voor wiskunde, 10 (1883), p. 76—80.

Sinuslinien in verschiedenem Massstab entstehenden *Schwingungskurven* für die Theorie der Elasticität ist bekannt[208]).

Auch der Name *Spirale* stammt aus dem Altertum (*Loria,* Spezielle Kurven, p. 441, Nr. 188, führt ihn auf *Plato* zurück.) Er lässt sich kaum mathematisch streng definieren[209]). Auch die Erklärungen bei *G. Loria*: Kurven, deren geeignetste analytische Darstellung man bei Anwendung von Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$, θ erhält, und bei *E. Pascal*: Kurven, die sich in unendlich vielen Windungen, von denen jede folgende entweder innerhalb oder ausserhalb der vorhergehenden liegt, um einen Punkt drehen, sind nur Notbehelfe[210]). Herkömmlich nennt man unter den Spiralen ausser den archimedischen (Nr. **6**), den logarithmischen (Nr. **16**) und den Sinusspiralen (Nr. **21—24**) noch die *parabolischen oder Fermat'schen Spiralen*[211]) ($\mathfrak{r}^2 = a^2\theta$), die *hyperbolischen Spiralen* ($\mathfrak{r} = a : \theta$) und die *reziproken parabolischen Spiralen oder Litui* ($\mathfrak{r}^2 = a^2 : \theta$). Allgemein nennt *G. Loria*[212]) die Kurven $\mathfrak{r}^n = a^n\theta$ *Spiralen höheren Grades. W. Rulf*[213]) spricht von *algebraischen Spiralen,* ohne ausdrücklich zu sagen, dass er darunter diejenigen transcendenten Kurven versteht, die durch eine algebraische Gleichung zwischen $\mathfrak{r}$ und θ definiert werden können[214])[215]).

Betrachtungen der Mechanik [IV 11b] führten zu den *Brachistochronen* (Kurven kürzester Fallzeit) und *Tautochronen* (Kurven mit von der Wegelänge unabhängiger Fallzeit), die unter den einfachsten Voraussetzungen gemeine Cykloiden (Nr. **6**) sind[216]). Ebenso entspringen der Mechanik [IV C, Abschn. III] die *elastischen Kurven,* die sich jedoch nicht durch endliche geschlossene Gleichungen mittels der elementaren transcendentenu Funktionen, sondern nur durch Differentialgleichungen [III D 8] definieren lassen[217])[218]).

---

208) Der englische Maler *W. Hogarth* machte die Sinuslinie als Wellenlinie zur Grundlage seiner ästhetischen Untersuchungen in dem Buche: Analysis of beauty, 1753.

209) Siehe *Hoffmann-Natani,* Mathem. Wörterbuch 6, Berlin 1867, p. 524.

210) *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 442, vgl. auch p. 596; *E. Pascal,* Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von *Schepp,* 2, Leipzig 1902, p. 544.

211) *E. Weyer,* Über die parabolische Spirale, Kiel und Leipzig 1894.

212) *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 434—441.

213) Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), p. 211—216.

214) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 441—448.

215) *W. Rulf* zeigte Fussn. 213, wie man den Krümmungsradius einer Spirale bestimmen kann, sobald man den Krümmungsradius derjenigen Spirale kennt, deren Radienvektoren die Polarsubnormalen der ursprünglichen Spirale sind.

216) Vgl. die Lehrbücher der Mechanik, ferner wegen der Verallgemeinerungen *C. H. Müller,* Über barytrope und tautobaryde Kurven, Diss. Marburg 1880.

217) Siehe *G. Loria,* Spezielle Kurven, p. 582—585.

Es würde zu weit führen, wollten wir solche Kurven besprechen, die durch gewisse Operationen aus bekannten Kurven hervorgehen und die *G. Loria abgeleitete Kurven* nennt, wie z. B. die *Fusspunktkurven* und die *Inversen* bekannter Kurven, ferner Kurven, die beim Gleiten eines starren Winkels längs einer Kurve entstehen, die *schiefen Evoluten* einer Kurve u. s. w. Derartige ebene Kurven hat namentlich *L. Aoust* in seiner Analyse des courbes planes, 1873, systematisch betrachtet, alsdann auch *G. Loria*. Zwischen verschiedenen der so hervorgehenden Kurvenarten bestehen besondere Beziehungen. Ein enger Zusammenhang[219]) besteht z. B. zwischen den *Schwerpunktskurven* und *Verfolgungskurven*[220]). Die Betrachtung der *Brennkurven* oder *kaustischen Kurven*, die durch Refraktion oder Reflexion entstehen, führte vielfach zu den schon von uns vorgeführten ebenen Kurven[221]).

Weiterhin nennen wir noch die *Antiloga* von *K. Chr. Fr. Krause*[222]), dargestellt durch die Gleichung $s\tau = a$, wenn s die Bogenlänge, τ der Tangentenwinkel ist, und die von *Krause* und *A. Peters* untersuchte Kurve[223]), bei der $s^2 = a^2\tau$ ist und die später von *E. Cesàro*[224]) als *Klothoide* bezeichnet und durch die natürliche Gleichung $s\varrho = \text{const.}$ (ϱ = Krümmungsradius) dargestellt wurde[225]).

Ferner sind diejenigen Untersuchungen erwähnenswert, die sich auf *Kurven* beziehen, *die gewissen unter ihren höheren Evoluten ähnlich*

---

218) Bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1898, p. 440, treten *elliptische Kurven 2. Art* auf, die eine grosse Klasse unter sich verwandter transcendenter Kurven bilden, die in geometrischer Hinsicht und mit Rücksicht auf ihre Anwendungen allgemein studiert zu werden verdienen, wozu die Verfasser auffordern.

219) Nach *E. Cesàro*, Nouv. ann. (3) 2 (1883), p. 85—89; ebenda 5 (1886), p. 65—83; Natürliche Geometrie, p. 97—110.

220) Siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 607—614. Zu diesen Kurven gehört die *Hundekurve*, die Bahn des seinem Herren nachlaufenden Hundes bei Voraussetzung konstanter Geschwindigkeiten von Herr und Hund. Sie ist, wenn die Bahn des Herren gerade ist, im allgemeinen interscendent [Nr. 1] (im besonderen algebraisch), dagegen transcendent, wenn die Geschwindigkeiten von Herr und Hund gleich gross sind.

221) Siehe *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 662—672.

222) Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima, hrg. v. *H. Schröder*, München 1835 (vom Verf. nicht eingesehen).

223) Z. B. bei *A. Peters*, Neue Kurvenlehre, Dresden 1835, p. 173, 174.

224) Nouv. ann. (3) 5 (1886), p. 511—520; Natürliche Geometrie, p. 15.

225) Sie ist ein Spezialfall der Kurven, bei denen $\varrho = as^n$ ist. Zu diesen Kurven gehört auch die Kreisevolvente (Nr. 6). Vgl. *G. Pirondini*, Giorn di mat. 30 (1892), p. 326—343, und *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 457—460.

oder kongruent sind[226]). Zu ihnen gehören die logarithmischen Spiralen (nach Nr. **16**) und die Cykloiden (nach Nr. **9**).

Stillschweigend haben wir uns auf solche Kurven beschränkt, in deren Gleichungen nur im allgemeinen endliche, stetige und differenzierbare Funktionen auftreten. Die *ausserordentlichen Kurven*, bei denen diese Voraussetzungen nicht sämtlich erfüllt sind, haben ihren Platz in der Funktionentheorie [II A 1, Nr. 9 ff.].

38. Einteilung der ebenen transcendenten Kurven. Die Gleichungen der ebenen transcendenten Kurven in Cartesischen oder projektiven Koordinaten sind so verschiedenartig, dass aus ihnen kein Einteilungsprinzip hervorgeht. Man könnte vermuten, dass eine bessere Übersichtlichkeit entspringe, wenn natürliche Bestimmungsstücke, wie Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ, eingeführt würden. Aber dann zeigt es sich, dass die interessanteren transcendenten Kurven durchaus nicht immer den einfacheren Gleichungen in s und ϱ entsprechen. Vgl. z. B. die vielen natürlichen Gleichungen in *E. Cesàro*'s Natürlicher Geometrie. Eine bessere Übersicht als die Darstellung in x, y gewährt allerdings die Darstellung in s und ϱ, wie man z. B. an den cykloidalen Kurven (Nr. 8) sieht. Ein besonderer Wert der Darstellung in natürlichen Koordinaten ist, dass sie gestattet, *systematisch* die Identität von Kurven nachzuweisen, die aus verschiedenen Definitionen hervorgegangen sind, da zwei ebene Kurven dann und nur dann kongruent sind, wenn bei beiden zwischen ihren Differentialinvarianten gegenüber allen Bewegungen (vgl. III D 1, 2, Nr. **14**) dieselben Relationen bestehen. Ein klassisches Beispiel hierfür gab *E. Cesàro*, vgl. Anm. 104.

Einen ernstlichen Versuch, zu einer rationellen Einteilung der ebenen transcendenten Kurven zu gelangen, macht *G. Loria*[227]). Er betrachtet nämlich nach *G. Fouret*[228]) und *Clebsch-Lindemann*[229]) eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, die in x, y, y' algebraisch ist:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Sie sei insbesondere in y' vom μ^{ten} Grade. Durch jeden Punkt der Ebene gehen dann von den ∞^1 algebraischen oder transcendenten

226) *V. Puiseux*, J. de math. (1) 9 (1844), p. 377—399; *G. Pirondini*, Nouv. ann. (3) 5 (1886), p. 460—480; *G. Loria*, Spezielle Kurven, p. 622—626.

227) Le curve panalgebriche, Prague Soc. Mém. 1901, Nr. 36, 1902, und: Spezielle Kurven, p. 407, 408, 724—730.

228) Paris soc. math. Bull. 2 (1874), p. 72—83.

229) Vorlesungen über Geometrie 1, Leipzig 1876, p. 962—978.

Integralkurven deren μ. Setzt man $y = ax + b$, $y' = a$ und ist die hervorgehende Gleichung:

$$f(x, ax + b, a) = 0$$

bei gegebenem a und b vom ν^{ten} Grade in x, so heisst dies, dass es unter den ∞^1 Integralkurven deren ν giebt, die eine beliebige Gerade $y = ax + b$ berühren. Alsdann liegen die Berührungspunkte der von irgend einem Punkte O an alle Integralkurven gezogenen Tangenten auf einer algebraischen Kurve von der Ordnung $\mu + \nu$, die O als μ-fachen Punkt hat. Entsprechend hüllen diejenigen Tangenten, die in allen Schnittpunkten irgend einer Geraden g mit den Integralkurven konstruiert werden können, eine algebraische Kurve von der Klasse $\mu + \nu$ ein, die die Gerade g als ν-fache Tangente hat. Umgekehrt, wenn eine ebene transcendente Kurve so beschaffen ist, dass die Berührungspunkte aller von einem *beliebigen* Punkte O der Ebene ausgehenden Tangenten an sie auf einer algebraischen Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, oder wenn sie so beschaffen ist, dass diejenigen ihrer Tangenten, die man in ihren Schnittpunkten mit einer *beliebigen* Geraden g der Ebene konstruieren kann, eine algebraische Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen, so ist die Kurve eine Integralkurve einer in x, y, y' algebraischen Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$, nach *G. Fouret*[230]).

Alle transcendenten Kurven von dieser Art nennt *G. Loria pan-algebraisch*. Er zeigt, dass eine grosse Anzahl von transcendenten Kurven, darunter viele wichtige, deshalb, weil sich ihre geometrischen Definitionen durch algebraische Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdrücken lassen, panalgebraisch sind, und bestimmt für sie die *Charakteristiken* μ und ν[231]). Man muss nämlich beachten, dass die Zahlen μ und ν nach den angegebenen Sätzen von *G. Fouret* auch dann bestimmbar sind, wenn nicht die Differentialgleichung einer Schar von ∞^1 panalgebraischen Kurven vorliegt, sondern nur eine solche Kurve gegeben ist, da die Zahl der von einem Punkte an die Kurve gehenden Tangenten unendlich gross ist. Die ebenen W-Kurven (Nr. **18**) lassen sich als die einfachsten panalgebraischen Kurven definieren, nämlich als diejenigen, bei denen $\mu = \nu = 1$ ist. Bei den allgemeinen Trochoiden (Nr. **3**) ist $\mu = 2$, $\nu = 6$, bei den spezielleren ist ν unter Umständen kleiner. Für die Kettenlinien und Traktricen (Nr. **27**) ist $\mu = \nu = 2$, für die Kurven von *Delaunay* und *Sturm* (Nr. **11**) ist $\mu = 2$, $\nu = 4$ u. s. w. Die allgemeinen Sinus-

230) Paris Bull. soc. math. 2 (1874), p. 96—100, insbes. p. 97.

231) In der vorhin erwähnten Abhandlung. Auch in *G. Loria*, Spezielle Kurven, sind jedesmal bei den einzelnen Kurven die Charakteristiken bestimmt.

spiralen (Nr. **21**) und die sie umfassenden allgemeinen *Cesàro*'schen Kurven (Nr. **26**) sind allerdings *nicht* panalgebraisch.

Durch die Ordnung nach den Charakteristiken wird aber wenigstens für die ausgedehnte Familie der panalgebraischen transcendenten Kurven eine rationelle Einteilung gewonnen.

39. Register der erwähnten Kurven. Nachstehend geben wir ein Verzeichnis aller im Vorhergehenden genannten Kurven mit der Angabe derjenigen Nummern, in denen sie vorkommen. Ist von einer Kurve *nur* in den Fussnoten einer Nummer die Rede, so ist dies durch Einklammern der Zahl angedeutet. Kurve oder Kurven ist mit K. abgekürzt.

Abgeleitete K. 37
Adiabatische K. 18
Ährenk. (9)
Algebraische Cykloiden (7)
— Sinusspiralen (21)
— Spiralen 37
— *W*-Kurven 14, (20)
Anharmonische K. (15)
Antevolute d. logarith. Spirale (16)
Antiloga 37
Aoust'sche K. (31)
Archimedische Spirale 6, 37
Ausserordentliche K. 37

Bertrand'sche K. 28—31
— verallgemeinert 33
Brachistochronen 37
Brennk. (9), 37
— d. logarith. Spiralen (16)

Cesàro'sche K. 26, 38
— verallgemeinert (26)
Cotes'sche Spirale (9)
Courbes cyclides (34)
Cyklische K. (5)
Cykloidale K. 8, 12, 26
Cykloiden 5, 7, 8, 9, (11), 12, 26
— höherer Ordnung (4)
Cykloden (6)
Cylindrokonische Schraubenlinien 20, 32, 34

Debeaune'sche K. (14)
Delaunay'sche K. 11, 37
Doppelloxodromen 34
Dreieckspotentialk. 18

Elastische K. 11, 37
Elliptische Kettenlinien (11)
Elliptische K. 2. Art (37)
Ephelix (8)
Epicykeln (3)
Epicykloiden (3), (4), 7, (11), (33)
Epitrochoiden 3, 5
Evoluten der Cykloiden 9
— d. logarith. Spiralen 16
— d. Ribaucour'schen K. (26)
— d. Trochoiden (9)
Evolvente einer Kreisevolvente (6)
Exponentialk. (14)

Fermat'sche Spirale 37
Filarevoluten ebener K. 32
Filarevolventen 2. O. von ebenen K. (33)
Fusspunktk. 37
— der Cykloiden 9
— der logarith. Spiralen 16
— der Sinusspiralen 23

Gemeine Cykloiden 6, (9), 26, 37
— Schraubenlinien 20, 28, 31, 32, 34, 37
— —, die Minimalk. sind, 35
Geodätische K. der Cylinder 31
Gewölbelinien (27)
Gratlinie einer Böschungsfläche 32

Hundek. 37
Hyperbeln höherer Ordnung (23)
Hyperbolische Kettenlinien (11)
— Spirale (27), 37
Hypercykloiden 8, 12
Hypocykloiden (4), 5, 7, (11)
Hypotrochoiden 3, 5

Integralk. einer Jacobi'schen Differentialgleichung 13
Integralk. einer Monge'schen Gleichung 36
Interscendente K. 1
— Parabeln 14, 17
Inverse K. 37

Kaustische K. 37
Kettenlinien 11, 26, 27, 38
— elliptisch od. hyperbolisch (11)
— gleichen Widerstands (27)
— mit zwei Nasen (27)
Klinoiden (27)
Klothoide 37
Kochleoide 37
Komplexk. 35, 36
Konische Schraubenlinien 34
Kreisevolvente 6, (8), (11), 12, 26, (37)
K., deren Bogenlänge einer Potenz der Abscisse proport. ist, (26)
—, die alle Kreise od. Ebenen od. Kugeln eines Büschels od. die Mantellinien eines Kegels unter konstantem Winkel schneiden, 34, 36
— eines Komplexes 1. Grades (20), 34
— — 2. Grades 35, 36
— eines tetraedralen Komplexes 20, 35, 36
—, die höheren Evoluten ähnlich sind, 37
— konstanter Krümmung (28), 29, 31
— konstanter Krümmung und Torsion 20
— konstanten Kurses 34
— konstanter Neigung 31
— konstanter Summe der Quadrate von Krümmung und Torsion (33)
— konstanter Torsion 28, 31
— konstanten Verhältnisses von Krümmung und Torsion 31
— kürzester Fallzeit 37
— mit geg. Relation zwischen Krümmung, Torsion, Bogenlänge u. dgl. 33
— mit konstantem Produkt von Krümmungsradius u. Normale 27
— mit konstantem Verhältnis von Krümmungsradius u. Normale 23, 26
— mit linearer Relation zwischen Krümmung und Torsion 28
— mit von der Wegelänge unabhängiger Fallzeit 37
Kurvenpaare mit gemeinsamen Hauptnormalen 28
— mit parallelen Hauptnormalen (28), 29
— mit reziproken begleitenden Dreikanten (31)

Lamé'sche K. (23)
Lituus 37
Logarithmische Doppelspiralen (34)
— K. 14, 19
— Spiralen (8), 12, (15), 16, 23, 26, 34, 37
Logistica (14)
Longitudinale (27)
Loxodromen 34, 36
— des Rotationscylinders 20

Meridiank. d. Rotationsflächen konstanter Krümmung 27
— — konstanter mittlerer Krümmung 11
Minimalk. 31, (32), 35, 36
Minimalschraubenlinien 35

Neoide (6)
Norwich's Spirale (6)

Orthogénides (23)
Orthogonale Trajektorien von Ellipsen oder Hyperbeln 17
— — von Kreisen 27
— — von Parabeln 19
Ozanam'sche K. 37

Panalgebraische K. 38
Parabeln, höhere, 14, 17
Parabolische Spirale 37
Paracykloiden 8, 12
Parallelk. (32)
Pericykloiden (5)
Polark. der Cykloiden (9)
Polytropische K. (18)
Pseudocykloiden 8
Pseudokatenarien (27)
Pseudotraktricen (27)

Quadratrixk. 37

Reziproke parabolische Spirale 37
Ribaucour'sche K. (11), (12), 26
— — vom Index — 3: 26, 27

Rhodoneen 9
Rollk. 2, (12)
— mit gerader Polbahn 10, 11, 12
Rosaces oder Rosenk. (9)
Rouletten 2

Schiefe Evoluten 37
Schraubenlinien allgemein 31, 32, 36
Schwerpunktk. 37
Schwingungsk. 37
Segelk. (27)
Seilk. (27)
Selbstprojektive K. (13)
Sinuslinie 37
Sinusspiralen (11), (12), 21, 26, 37, 38
— vom Index Null 23
Sphärische Cykloiden (32)
— Kreisevolventen (32)
— Loxodromen 20, 34
— Schraubenlinien 32
Spiralen allgemein 37
Spirales à inflexion proportionelle (23)
— équiharmoniques (15)
— sinusoïdes (21)
Spirale von Cotes (9)
Spirale von Sturm oder Norwich (6)
Sprungseilk. (11)
Sturm'sche K. 11, 38
Syntraktrix (27)

Tautochronen 37
Tetraedral-symmetrische K. 25, 35
Traktorie (27)
Tractrix complicata (27)
Traktricen 27, 38
Transcendente K. allgemein 1, 38
Triangulär-symmetrische K. 25
Trochoiden allgemein 3—5, 7, (8), 9, 38

Velaria (27)
Verfolgungk. 37

W-Kurven eben 13—19, 38
— — und von 1. Art 14, 15
— — und von 2. Art 14, 19
— im Raume 13, (16), 20, 34, 35
Wellenlinie (37)
Windschiefer Kreis (31)

Zuglinie (27)

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

III D 5. BESONDERE FLÄCHEN.

Von

R. v. LILIENTHAL

in Münster i/w.

Inhaltsübersicht.

I. Geradlinige Flächen.

1. Erklärungen.
2. Nichtabwickelbare Linienflächen.
3. Abwickelbare Linienflächen.

II. Weitere kinematisch definierbare Flächen.

4. Cyklische Flächen.
5. Schraubenflächen.
6. Translationsflächen.
7. Spiralflächen.

III. Krümmungsmittelpunktsflächen.

8. Erklärungen.
9. Die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche artet in eine Kurve aus.
10. Beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche arten in Kurven aus. *Dupin*'sche Cykliden.
11. Die allgemeine Krümmungsmittelpunktsfläche.
12. Bestimmung einer Fläche, für welche eine Schale oder beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche vorgeschrieben sind.

IV. Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

13. Die *Monge*'schen Gesimsflächen.
14. Untersuchungen von *Bonnet, Serret, Enneper, Rouquet.*
15. Untersuchungen von *Dini, Darboux.*
16. Untersuchungen von *Brioschi, Dini, Dobriner, Blutel, Darboux.*

V. Weingarten'sche Flächen.

17. Die beiden *Weingarten*'schen Sätze.
18. Weitere Sätze.

VI. Minimalflächen.

19. Historisches. Sätze von *Meusnier.* Integral von *Monge.*
20. Die von *Scherk, Catalan, Enneper* gefundenen Minimalflächen.
21. Analytische Darstellungen der Minimalflächen von *Weingarten, Enneper, Weierstrass, Riemann, Peterson, Beltrami.*

22. Bestimmung eines Minimalflächenstücks bei gegebener Begrenzung.
23. Die einer Minimalfläche assoziierten Minimalflächen.
24. Methode von *Darboux*.
25. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen analytischen Streifen.
26. Weitere besondere Minimalflächen.
27. Methode von *Lie*.
28. Die *Goursat*'sche Transformation der Minimalkurven.
29. Einer Abwickelbaren eingeschriebene Minimalflächen.
30. Methode von *Ribaucour*.
31. Sätze von *Schwarz, Weingarten, Dini*.

VII. Flächen konstanter Krümmung.

32. Untersuchungen von *Minding, Dini, Enneper, Beltrami, Hilbert*.
33. Die Rotationsflächen konstanter Krümmung und Linienelemente der pseudosphärischen Flächen.
34. Die geodätischen Linien auf den Flächen konstanter Krümmung.
35. Transformationen und Haupttangentenkurven der Flächen konstanter Krümmung.

VIII. Weitere besondere Flächen.

36. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Hauptkrümmungshalbmesser.
37. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Krümmungslinien.
38. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Haupttangentenkurven und konjugierten Linien.
39. Flächen mit besonderen Eigenschaften der geodätischen Linien und geodätischen Kreise.
40. Imaginäre Flächen.

Litteratur.

Bemerkung. Auf die im folgenden häufiger angeführten Werke:

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. 1, Paris 1887; 2, 1889; 3, 1894; 4, 1896;
L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von *M. Lukat*, Leipzig 1896/99 (im Original: Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1893, 2. Ed. 1902),

wird unter der Bezeichnung „*Darboux*“ 1, 2, 3, 4; „*Bianchi*“ hingewiesen.

Weitere Litteratur siehe unter III D 1, 2, p. 2.

I. Geradlinige Flächen.

1. Erklärungen. Eine Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann, nennt man eine *geradlinige* Fläche (*Linienfläche, Regelfläche, windschiefe Fläche*). Für den Fall, dass die erzeugende Gerade stets Tangente ein und derselben Kurve ist, heisst die geradlinige Fläche *abwickelbar*, weil sie alsdann auf eine Ebene abgewickelt werden kann (III D 6 a, Nrr. **3**, **21**). Lässt man eine durch

einen festen Punkt gehende Gerade sich so bewegen, dass sie der erzeugenden Geraden einer Linienfläche stets parallel ist, so erhält man den *Leitkegel* (*Richtungskegel*) der Linienfläche, der bei den Zylinderflächen durch eine Gerade vertreten wird, der aber auch, wie bei der gewöhnlichen Schraubenfläche (Nr. 5), eine Ebene, die *Leitebene*, sein kann. Besitzt eine Linienfläche eine Leitebene, und treffen ihre Erzeugenden ein und dieselbe feste Gerade, so wird sie eine *Konoidfläche* genannt. Die geradlinigen Flächen mit einer Leitebene sind ausführlich untersucht von *E. Catalan*[1]), der auch im besonderen die gewöhnliche Schraubenfläche und ihre geodätischen Linien behandelte. Die um den Mittelpunkt des Leitkegels mit dem Halbmesser Eins beschriebene Kugel schneidet aus dem Leitkegel die *sphärische Indikatrix* der Linienfläche aus. Nehmen wir als Koordinaten der Punkte einer Linienfläche:

$$x = x_0 + up_x, \quad y = y_0 + up_y, \quad z = z_0 + up_z,$$

wo x_0, y_0, z_0; p_x, p_y, p_z — die Richtungskosinus der Erzeugenden — Funktionen von v allein bedeuten, so haben wir es mit einer abwickelbaren Fläche zu thun, wenn

$$\sum x_0'(p_y p_z' - p_z p_y') = 0.$$

Die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung der geradlinigen Flächen und ihrer Arten bildet ein Hauptziel der Application d'Analyse à la Géométrie von *G. Monge* (fünfte Aufl. besorgt von *J. Liouville*, Paris 1850). Vgl. *J. A. Serret*, Lehrbuch der Diff.- und Integralrechnung, deutsch von *A. Harnack* 1, Leipzig 1884, p. 486 ff.; 2. Aufl., von *G. Bohlmann*, 1, 1897, p. 471 ff. Über die Bedingung, unter der eine gegebene, nicht abwickelbare, Fläche geradlinig ist, vgl. *E. Cosserat*, Toulouse Mém. (9) 7 (1895), p. 373.

2. Nichtabwickelbare Linienflächen. Wir erwähnen zunächst Sätze von *M. Chasles*[2]). Die Tangentialebenen der Fläche längs einer Erzeugenden bilden ein Ebenenbüschel, dessen Ebenen den Punkten der Erzeugenden, in denen sie die Fläche berühren, projektiv zugeordnet sind. Der Satz, dass die Normalen einer Linienfläche längs einer Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid bilden, dürfte auf

1) J. éc. polyt. 17 (1843), p. 121. Vgl. *Ch. Bioche*, Bull. sciences math. (2) 16 (1892), p. 159.

2) J. de math. (1) 2 (1837), p. 413; Corréspond. math. et phys. 11 (1839), p. 52. Vgl. die ausführliche Untersuchung auf kinematischer Grundlage von *E. Lamarle*, Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation, Bruxelles-Paris (1859), p. 57 ff.

P. Hachette zurückzuführen sein[2a]). Jede Ebene des Büschels berührt in einem Punkte P die Fläche und steht in einem Punkte P' auf ihr senkrecht. Legt man drei Ebenen durch eine Erzeugende, so bilden die sechs Punkte, in denen Berührung und Senkrechtstehen stattfindet, eine Involution. Das Produkt p der Entfernungen der Punkte P und P' von einem festen Punkte O der Erzeugenden ändert sich nicht, wie auch der Punkt P in der Erzeugenden gewählt sein mag, es ist also eine Funktion von v allein. Der Punkt O heisst der *Mittelpunkt* (*Zentralpunkt*) der Erzeugenden. Er ist der Ort des Punktes P', falls P im Unendlichen liegt, und er ist gleichzeitig der in der Erzeugenden liegende Endpunkt ihres kürzesten Abstandes von der benachbarten Erzeugenden. Der Ort der Punkte O wird die *Grat- oder Striktionslinie,* auch *Kehllinie* der Fläche genannt. Die Tangenten der Gratlinie sind senkrecht zu den entsprechenden Tangenten der sphärischen Indikatrix. Die Koordinaten der Gratlinie ergeben sich aus den Koordinaten der Fläche, wenn man u durch die Funktion u_0 ersetzt, die durch die Gleichung

$$u_0 = -\frac{\sum x_0' p_x'}{\sum p_x'^2}$$

bestimmt wird[2b]). Bezeichnen wir mit ψ den Winkel, den die im Punkte (u) einer Erzeugenden berührende Tangentialebene mit der im Punkte (u_0) derselben Erzeugenden berührenden bildet, so ist:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{u-u_0}{\beta},$$

wo β nur von v abhängt. Man nennt β den *Verteilungsparameter (Distributionsparameter).* Das oben mit p bezeichnete Produkt hat den Wert $-\beta^2$. Für β selbst findet sich die Gleichung[3]):

$$\beta = \frac{-1}{\sum p_x'^2} \sum x_0'(p_y p_z' - p_z p_y').$$

Nennt man φ den Winkel, unter dem die betrachtete Erzeugende die Gratlinie schneidet, ferner s die Bogenlänge der Striktionslinie, σ die Bogenlänge der sphärischen Indikatrix, so ist auch:

$$\beta = -\sin\varphi \frac{ds}{d\sigma}.$$

2a) J. f. Math. 8 (1832), p. 358. Vgl. *E. Duporcq,* Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 111.

2b) Über die Bestimmung einer geradlinigen Fläche mit vorgeschriebener Gratlinie vgl. *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 345.

3) „*Darboux*", 3, p. 302.

Für das *Gauss*'sche Krümmungsmass (III D 1, 2, Nr. **36**) der Fläche erhält man den Ausdruck: $\frac{-\beta^2}{((u-u_0)^2+\beta^2)^2}$.

In den Punkten der Gratlinie ist also das Quadrat des Verteilungsparameters gleich dem absoluten Wert des Produkts der Hauptkrümmungshalbmesser.

Die durch die Punkte der Gratlinie senkrecht zu den daselbst schneidenden Erzeugenden der Fläche gezogenen Flächentangenten bilden die *konjugierte* Fläche der Linienfläche. Ihre Gratlinie fällt mit der der gegebenen zusammen[4]). Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarter Erzeugenden der gegebenen Fläche mit $d\omega$, den Winkel der entsprechenden Erzeugenden der konjugierten Fläche mit $d\omega'$, so ist das Verhältnis $\frac{d\omega'}{d\omega}$ gleich der geodätischen Krümmung (III D 3, Nr. **12**) der sphärischen Indikatrix der gegebenen Fläche im entsprechenden Punkt[5]).

G. Pirondini[5a]) zeigte, dass längs der Striktionslinie einer geradlinigen Fläche die Erzeugenden der Fläche, ihre Normalen und die Erzeugenden ihrer konjugierten Fläche bezw. parallel sind den Tangenten, den Haupt- und Binormalen einer Kurve. Die Hinzunahme dieser Kurve ist häufig von Vorteil, so in dem von *R. Hoppe*[5b]) behandelten Falle, in welchem die Gratlinie zugleich Krümmungslinie der Linienfläche ist.

Eine ausführliche Erörterung der auf einer Linienfläche gezogenen Kurven findet man in dem angeführten Werke von *P. Serret*[6]). Hervorzuheben sind Sätze über Haupttangentenkurven[7]) (III D 3, Nr. **1**). Die eine Schar dieser Linien wird von den Erzeugenden der Fläche gebildet. Hinsichtlich der anderen kann man mit *J. Bertrand*[8]) fragen,

---

4) *Paul Serret*, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 144.

5) *P. Serret*, a. a. O. p. 146.

5a) Giorn. di mat. 23 (1885), p. 296; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 218.

5b) Arch. Math. Phys. (2) 15 (1897), p. 251. Vgl. *E. Cesàro*, Nouv. Ann. (3) 8 (1889), p. 445; *Ch. Bioche*, Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 42.

6) p. 143 ff.

7) Vgl. *A. Clebsch*, J. f. Math. 68 (1868), p. 151; *A. Voss*, Math. Ann. 12 (1877), p. 485; *E. Picard*, Paris, C. R. 84 (1877), p. 229; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. (1) 60 (1877), p. 276; *G. H. Halphen*, Par. soc. math. Bull. 6 (1878), p. 7; *G. Koenigs*, Paris, C. R. 106 (1888), p. 51; *E. Ciani*, Giorn. di mat. 27 (1889), p. 233, wo die durch eine Raumkurve bestimmten geradlinigen Flächen untersucht sind.

8) J. de math. (1) 15 (1850), p. 332. Vgl. im selben Bande p. 481 die

ob sich in ihr Einzelkurven finden, die die Erzeugenden senkrecht schneiden. Die Erzeugenden sind dann die Hauptnormalen einer solchen Haupttangentenkurve (III D 4, Nr. 28). Hier sind folgende Fälle möglich: 1) Es findet sich keine solche Haupttangentenkurve. 2) Es findet sich nur eine solche. Alsdann geht die *Riccati*'sche Differentialgleichung (II A 4 b, Nr. 8), welche im allgemeinen die Haupttangentenkurven bestimmt, in eine lineare über und ist durch Quadraturen integrierbar[9]). 3) Es finden sich zwei. Dann besteht zwischen der ersten und zweiten Krümmung jeder derselben eine lineare Beziehung[10]). 4) Sämmtliche Einzelkurven der Schar sind orthogonale Durchdringungskurven der Erzeugenden. Hier besitzt jede der fraglichen Haupttangentenkurven konstante erste und zweite Krümmung und ist somit eine Schraubenlinie (III D 1, 2, Nr. 32; III D 4, Nr. 20). Die entsprechende Fläche ist die gewöhnliche Schraubenfläche[11]) (Nr. 5).

Aus dem Umstand, dass die Bestimmung der nicht geraden Haupttangentenkurven einer Linienfläche von einer *Riccati*'schen Differentialgleichung abhängt, folgert *P. Serret*[12]), dass die fraglichen Kurven aus je zwei Erzeugenden projektive Punktreihen ausschneiden[13]). Besitzt die betrachtete Linienfläche eine Leitebene, so teilen die fraglichen Kurven je zwei Erzeugende in proportionale Abschnitte[14]). Wenn die Gratlinie einer geradlinigen Fläche zugleich eine Haupttangentenkurve derselben ist, so ist die Tangente der sphärischen Indikatrix der Fläche parallel der Binormalen der Gratlinie. Zugleich sind hier die Verteilungsparameter der Fläche und ihrer konjugierten einander gleich[15]).

O. Bonnet fand den Satz[16]), dass, wenn eine auf einer Linienfläche gezogene Kurve von den drei Eigenschaften — eine geodätische Linie zu sein — eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden zu sein — die Gratlinie zu sein — zwei besitzt, sie auch die dritte besitzt.

Arbeit von *Voizot,* und im selben Journal (2) 1 (1856), p. 223 eine Arbeit von *A. H. Curtis.*

9) Vgl. *E. Bour,* J. éc. polyt. 22 (1862), p. 48.

10) *Serret,* a. a. O. p. 109. 11) *Serret,* a. a. O. p. 170.

12) a. a. O. p. 169; vgl. *A. Demoulin,* Mathesis (2) 9 (1899), p. 159.

13) Über die allgemeinen Kurven mit dieser Eigenschaft vgl. *Ch. Bioche,* Bull. sci. math. (2) 12 (1888), p. 290; Toulouse Ann. 3 (1889), p. 1; über die geradlinigen Flächen, auf denen die Krümmungslinien die fragliche Eigenschaft besitzen vgl. *Ch. Bioche,* Par. soc. math. Bull. 16 (1888), p. 119.

14) *Serret,* a. a. O. p. 167. Vgl. *A. Enneper,* Gött. Nachr. (1870), p. 501; (1871), p. 2.

15) *Serret,* a. a. O. p. 150; *E. Catalan,* Bull. soc. philomath. (1848), p. 68.

16) J. éc. polyt. 19 (1848), p. 71.

Die Flächen, auf denen die Gratlinie eine geodätische Linie ist und zugleich die Erzeugenden unter konstantem Winkel schneidet, werden erhalten, wenn man durch die Punkte einer Raumkurve Gerade zieht, die in den rektifizierenden Ebenen (III D 1, 2, Nr. 29) der Raumkurve liegen und mit der Kurve einen konstanten Winkel bilden[17]).

Hinsichtlich der Krümmungslinien bemerkte *P. Serret*[18]), dass es in jeder Schar von solchen im allgemeinen vier Einzelkurven gibt, welche die Erzeugenden unter konstantem Winkel schneiden. Die einzige Linienfläche, bei der alle Krümmungslinien diese Eigenschaft haben, ist die gewöhnliche Schraubenfläche; die einzige geradlinige Fläche mit lauter ebenen Krümmungslinien ist das einschalige Rotationshyperboloid[19]).

Aus einer Arbeit von *U. Dini*[20]) erwähnen wir den Satz: Sind die Erzeugenden einer Linienfläche längs ihrer Gratlinie die Tangenten eines Zylinders, so ist die Fläche entweder abwickelbar oder ihr Leitkegel ist ein Kreiskegel. In derselben Arbeit sind weitere Eigenschaften von Linienflächen mit einem Kreisleitkegel mitgeteilt. — *S. Lie*[20a]) und *E. Picard*[21]) betrachteten die Linienflächen, deren Erzeugende einem linearen Komplex (III C 9) angehören. In zwei Punkten einer Erzeugenden ist die Tangentialebene einer solchen Fläche zugleich die dem Berührungspunkte hinsichtlich des Komplexes konjugierte Ebene. Der Ort jener Punkte auf der Fläche wird von zwei Haupttangentenkurven gebildet.

Sätze über geradlinige Flächen mit *Liouville*'schem Linienelement (III D 3, Nr. 18) finden sich bei *G. Demartres*, Par. C. R. 110 (1890), p. 329; besondere konjugierte Kurvensysteme (III D 3, Nr. 3) auf geradlinigen Flächen behandelt *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 214, 215.

3. Abwickelbare Linienflächen. (Vgl. III D 3, Nr. 4, p. 112.) Die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind die Tangenten ihrer Gratlinie. Bezeichnet man die Koordinaten der Punkte der letzteren mit x_0, y_0, z_0, mit v ihre von einem festen Punkte an gerechnete Bogenlänge, so stellen die Gleichungen:

$$x = x_0 + (u - v)\frac{dx_0}{dv}, \quad y = y_0 + (u - v)\frac{dy_0}{dv}, \quad z = z_0 + (u - v)\frac{dz_0}{dv}$$

die fragliche Abwickelbare in der Art dar, dass die Kurven $u = \text{const.}$

17) *Serret*, a. a. O. p. 149, 150. 18) a. a. O. p. 159.

19) *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 1 (1867—68), p. 146 und ebenda (2) 4 (1870—71), p. 201.

20) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 281. 20a) Math. Ann. 5 (1872), p. 179.

21) Paris, C. R. 84 (1877), p. 229 und Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 331. Vgl. *Ch. Bioche*, Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 39.

die senkrechten Durchdringungskurven der Erzeugenden (v = const.) sind[21a]). Die den wachsenden bez. abnehmenden Werten der Bogenlänge v entsprechenden Halbtangenten der Gratlinie bilden den Teil der Fläche, für welchen $u - v$ positiv bez. negativ ist. Die auf dem ersten oder zweiten dieser Teile liegenden Kurven u = const. werden durch die Bewegung des einen der beiden Endpunkte eines auf die Gratlinie gelegten Fadens erhalten, wenn der Faden so abgewickelt wird, dass beim Fortschreiten seines Berührungspunktes auf der Gratlinie sich die zu letzterem gehörende Bogenlänge verkleinert oder vergrössert. Sie sind also die *Filarevolventen* der Gratlinie[21b]) (III D 1, 2, Nr. **33**). Andererseits bilden sie die eine Schar der Krümmungslinien der Fläche, während die andere von den Erzeugenden gebildet wird. Hier gilt der Satz[21c]), dass die Polarflächen (Ort der Krümmungsachsen, III D 1, 2, Nr. **29**) der Kurven u = const. in eine einzige Fläche zusammenfallen, die die Rolle der Krümmungsmittelpunktsfläche (Nr. 8) der Abwickelbaren spielt[21d]) und mit der rektifizierenden Fläche der Gratlinie, d. h. der Einhüllenden ihrer rektifizierenden Ebenen (III D 1, 2, Nr. **29**) identisch ist.

Sowohl die Bestimmung der geodätischen Linien[22]) (III D 3, Nr. **14**) einer Abwickelbaren wie die Bestimmung der isogonalen Trajektorien ihrer Erzeugenden[23]) führt auf die Integration einer linearen Differentialgleichung. Schneidet eine Geodätische die zur Bogenlänge v_0 gehörende Erzeugende unter dem Winkel φ_0, so schneidet sie die zur Bogenlänge v gehörende Erzeugende unter dem Winkel $\varphi = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varrho} + \varphi_0$, wo $\frac{1}{\varrho}$ die erste Krümmung der Gratlinie bezeichnet. Dabei ist tg φ gleich dem

---

21a) Für die Anwendung von Ebenenkoordinaten vgl. *L. Painvin,* Par. C. R. 71 (1870), p. 217.

21b) *E. Beltrami,* Ann. di mat. (1) 4 (1861), p. 276; *E. Combescure,* J. f. Math. 62 (1863), p. 174.

21c) *H. Molins*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 347.

21d) *G. Monge*, Paris Mém. sav. [étr.] 10 (1785) (lu 1776), p. 546.

22) *F. Minding*, J. f. Math. 20 (1840), p. 223; *H. Molins,* J. de math. (1) 12 (1847), p. 394; *L. Aoust,* Analyse infinités. des courbes tracées sur une surf. quelc., Paris (1869), p. 189; *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 615. Eine zusammenfassende Darstellung gab *A. Puchta,* Wien. Ber. 97 IIa (1888), p. 1269. Vgl. *„Bianchi"*, p. 171; *„Darboux"* 3, p. 220. Eine charakteristische Eigenschaft der fraglichen Linien zeigte *H. v. Mangoldt,* Math. Ann. 18 (1881), p. 604. Über algebraische Geodätische und Krümmungslinien auf abwickelbaren Flächen vgl. *P. Stäckel,* Math. Ann. 43 (1893), p. 171; 45 (1894), p. 341.

23) *H Molins,* J. de math. (1) 8 (1843), p. 132; vgl. *E. Combescure,* J. f. Math. 62 (1863), p. 174.

Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung der Geodätischen. Die sämtlichen Geodätischen, welche eine Erzeugende unter demselben Winkel schneiden, schneiden jede Erzeugende unter ein und demselben Winkel; ihre orthogonalen Trajektorien sind wieder geodätische Linien der Abwickelbaren, und jede Geodätische der letzteren ist eine isogonale Trajektorie einer derartigen Schar. — Die Aufgabe, durch eine gegebene Kurve eine abwickelbare Fläche so zu legen, dass die Kurve auf ihr ein geodätischer Kreis (III D 3, Nr. 38) mit gegebener geodätischer Krümmung wird, ist von *H. Molins*[24]) gelöst und von *W. Schell*[25]) ausführlich behandelt worden. — Bei *P. Serret*[26]) finden sich die Sätze:

1) Wenn die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche eine feste Kugel unter konstantem Winkel treffen, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Kegels, der vom Kugelmittelpunkt aus durch diese Gratlinie gelegt ist.

2) Besitzt eine abwickelbare Fläche eine ebene Krümmungslinie, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Zylinders, der durch die Gratlinie hindurchgeht und auf der Ebene der Krümmungslinie senkrecht ist.

3) Besitzt eine abwickelbare Fläche eine sphärische Krümmungslinie, so ist ihre Gratlinie eine geodätische Linie des Kegels, der vom Mittelpunkt der Trägerkugel aus durch die Gratlinie gelegt ist.

Hinsichtlich der geodätischen Linien auf einem Kegel bemerkt *G. Pirondini*[27]), dass die Schmiegungsebenen einer jeden konstanten Abstand von der Spitze des Kegels besitzen, und dass das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung einer solchen Linie eine lineare Funktion der Bogenlänge ist. Beide Sätze sind umkehrbar.

In einer grossen Arbeit über die Umhüllungsflächen von Ebenen- und Kugelscharen[28]) betrachtet *G. Pirondini* den Schnitt einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche mit der Fläche selbst. Dieser Schnitt berührt die Gratlinie der abwickelbaren Fläche in einem Punkt, und in ihm ist das Verhältnis des Krümmungshalbmessers des Schnitts zum Halbmesser der ersten Krümmung der Gratlinie gleich $\frac{4}{3}$.[29]) Ferner wird die Aufgabe gelöst, durch eine gegebene Kurve eine

24) J. de math. (2) 1 (1856), p. 265.

25) Allgem. Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig 1898, p. 142.

26) a. a. O. p. 89. Den Satz 2) gibt *O. Bonnet*, J. éc. polyt. 20 (1853), p. 170. S. auch *Schell*, Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 4.

27) Giorn. di mat. 26 (1888), p. 105, 115. Vgl. *X. Antomari*, Par. soc. math. Bull. 17 (1889), p. 118.

28) Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 641. 29) ibid. p. 644.

Abwickelbare so zu legen, dass die Kurve durch Abwickelung der Fläche auf eine Ebene in eine gegebene ebene Kurve übergeht[30]). Auch die Frage, unter welchen Bedingungen eine mit dem Dreikant der Tangente, Haupt- und Binormale einer Kurve (III D 1, 2, Nr. 29) festverbundene Gerade eine abwickelbare Fläche beschreibt, ist von *Pirondini* behandelt[31]), und im besonderen ist der Fall untersucht, in dem die Gerade einer Kante des Dreikants parallel ist. Die Parallelfläche einer Abwickelbaren wurde von *Pirondini*[32]), die zwei gegebenen Flächen umschriebene Abwickelbare von *A. Enneper* untersucht[33]).

II. Weitere kinematisch definierbare Flächen.

4. Cyklische Flächen. Unter einer *cyklischen* Fläche versteht man eine solche, auf der eine einfach unendliche Anzahl von Kreisen liegt. Für die analytisch-geometrische Behandlung der cyklischen Flächen ist die Methode von *E. Laguerre* von Wichtigkeit, bei der ein Kreis als Durchschnitt zweier isotroper Kegel erscheint[34]). Die erste differentialgeometrische Untersuchung dieser Flächen dürfte *A. Enneper* gegeben haben, der zunächst den Satz aufstellte[35]): Schneiden sich auf einer cyklischen Fläche je zwei unendlich benachbarte Kreise in zwei Punkten, so ist die Fläche die Einhüllende einer einfach unendlichen Schar von Kugeln und umgekehrt. Fallen die Schnittpunkte in einen Punkt zusammen, so berührt in ihm der erzeugende Kreis die Schnittpunktskurve. Jetzt ist entweder die Ebene des Kreises zugleich die Schmiegungsebene der Schnittpunktskurve oder sie enthält die Tangente der Mittelpunktskurve der erzeugenden Kreise.

Die Einhüllenden einer einfach unendlichen Kugelschar bilden eine Hauptklasse unserer Flächen[36]) (vgl. III D 3, Nr. 4, p. 113). Hier bilden die erzeugenden Kreise die eine Schar der Krümmungslinien; längs jedes erzeugenden Kreises bilden die Normalen der Fläche einen Kegel, dessen Spitze (S) auf der Mittelpunktskurve (C) der Kugeln liegt,

30) ibid. p. 647. 31) ibid. p. 645.

32) Ann. di mat. (2) 19 (1891—92), p. 247.

33) Gött. Nachr. 1869, p. 207.

34) Paris, Bull. Soc. Philomat. 7 (1870), p. 95, 209 (III C 4).

35) Gött. Nachr. 1866, p. 243 und ausführlich: Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 393.

36) *G. Monge,* Application d'Analyse à la Géom., 5. Auflage, besorgt von *J. Liouville,* Paris 1850, p. 238, 369; *A. Ribaucour,* Paris, Bull. Soc. Philomat. 5 (1868), p. 30. Vgl. *L. Lecornu,* J. éc. polyt. Cah. 53 (1883), p. 135; *A. Pirondini,* Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 672.

und die Entfernung dieser Spitze von den Punkten des betrachteten Kreises ist gleich dem zu dem letzteren gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (vgl. Nr. 9). Die Endpunkte der zur zweiten Schar der Krümmungslinien gehörenden Hauptkrümmungshalbmesser bilden längs des betrachteten Kreises einen Kegelschnitt, der aus obigem Kegel durch eine zur Schmiegungsebene der Kurve (C) im Punkte (S) senkrechte Ebene ausgeschnitten wird. Wenn zwei unter den nicht kreisförmigen Krümmungslinien eben sind, so sind es sämtliche, und ihre Ebenen gehen durch eine Gerade. Diesen Einhüllenden hat *Enneper* noch eine besondere Arbeit gewidmet[37]) und gezeigt, dass die Krümmungslinien dieser Flächen nur dann isotherm (III D 3, Nr. 19) sein können, wenn die Mittelpunktskurve der Kugeln eben ist, ferner, dass bei konstantem Kugelhalbmesser nur der *Kreiswulst (torus)* isotherme Krümmungslinien besitzt[38]). Die Bestimmung der fraglichen Flächen mit isothermen Krümmungslinien wird von *Enneper* auf eine Quadratur zurückgeführt, wenn der Krümmungshalbmesser der Mittelpunktskurve der Kugeln als Funktion des Radius der Kugeln bekannt ist[39]), auch werden besondere Fälle behandelt. Die Einhüllende einer Schar von Kugeln mit demselben Halbmesser wird *Röhrenfläche (Kanalfläche)* genannt[39a]).

Im allgemeinen schneiden sich zwei unendlich benachbarte erzeugende Kreise nicht, und man kann dann nach dem Ort der Punkte der Erzeugenden fragen, in denen ihre Entfernung von den Punkten des benachbarten Kreises ein Maximum oder Minimum besitzt[40]). (*Striktionslinie* im Fall des Minimums, *Elongationslinie* im Fall des Maximums.) Die Bestimmung dieser Linien führt *Enneper* auf den Satz, dass es im allgemeinen vier derartige Linien auf einer cyklischen Fläche gibt, und auf bemerkenswerte Eigenschaften dieser Linien in besonderen Fällen. — Erwähnt sei noch die *Enneper*'sche Berechnung der Hauptkrümmungshalbmesser einer cyklischen Fläche[41]).

Eine von der *Enneper*'schen verschiedene, mit Hülfe der kinematischen Methode durchgeführte und an geometrischen Ergebnissen reichere Untersuchung der cyklischen Flächen gab *G. Demartres*[42]). Wir erwähnen die Sätze, dass im allgemeinen auf jedem erzeugenden

37) Gött. Nachr. 1873, p. 217.

38) ibid. p. 225. 39) ibid. p. 229.

39a) Das unter 36) zitierte Werk von *Monge* p. 36; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 179.

40) Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 411; vgl. *G. Demartres*, Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 151. 41) ibid. p. 402.

42) Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 123; vgl. „*Darboux*“ 4, p. 493.

Kreis zwei Punkte vorhanden sind, in denen er von einer Krümmungslinie, und zwei weitere Punkte, in denen er von einer Haupttangentenkurve berührt wird[43]). Die Ebenen zweier unendlich benachbarter Kreise (G) und (G') schneiden sich in der Charakteristik der Ebene von (G). Projiziert man (G') senkrecht auf die Ebene von (G), so hat die Projektion mit dem Kreis (G) eine Sehne gemein, deren Durchschnitt mit der Charakteristik im Punkte (P) gelegen sei. Jede in der Ebene von (G) durch (P) gelegte Gerade (L) schneidet den Kreis (G) in zwei Punkten, die als *konjugiert* bezeichnet werden sollen. Nun gilt der Satz, dass die Tangentialebenen einer cyklischen Fläche in zwei konjugierten Punkten eines erzeugenden Kreises sich in einer Geraden schneiden, die ein einschaliges Hyperboloid beschreibt, wenn sich (L) um (P) dreht[44]). Die Normalen der Fläche längs eines erzeugenden Kreises treffen einen Kegelschnitt[44]), der in zwei Gerade ausartet, wenn der Kreis (G') mit dem Kreis (G) *einen* Punkt gemein hat[45]). Irgend vier orthogonale Trajektorien der erzeugenden Kreise schneiden jeden dieser Kreise in vier Punkten mit konstantem Doppelverhältnis[46]).

Die Frage nach den cyklischen Flächen, auf denen die orthogonalen Trajektorien der erzeugenden Kreise geodätische Linien sind, führt auf die Rotationsflächen und diejenigen Flächen, bei denen die Mittelpunktskurve der Kreise konstante Torsion (III D 1, 2, Nr. **30**) besitzt, während die Ebenen der Kreise mit den Schmiegungsebenen dieser Kurve zusammenfallen, und der Halbmesser der Kreise dem Torsionshalbmesser dieser Kurve gleich ist[47]). Hier schneiden zwei Kreise auf einer orthogonalen Trajektorie einen Bogen aus, der dieselbe Länge besitzt wie das entsprechende Bogenstück der Mittelpunktskurve der Kreise[48]), und es gilt der Satz von *S. Lie*[48a]), dass die Torsion der orthogonalen Trajektorien konstant und gleich der Torsion der Mittelpunktskurve ist.

Demartres belegt mit dem Namen *isocyklische* Fläche eine solche, bei der die erzeugenden Kreise isotherm sind, und findet im Besonderen, dass ausser den Rotationsflächen und Kanalflächen diejenigen Einhüllenden einer Kugelschar, deren Krümmungslinien isotherm sind, durch die Eigenschaft gekennzeichnet werden, dass, wie schon *Enneper* fand, die Mittelpunktskurve eben ist, und die Kugeln selbst eine feste Kugel senk-

43) Die in 42) zitierten Ann. p. 135. 44) ibid. p. 137. 45) ibid. p. 142.
46) ibid. p. 150; *E. Picard*, Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 362. Vgl. *A. Demoulin*, Bull. sci. math. (2) 22 (1898), p. 174.
47) Die in 42) zitierten Ann. p. 152. 48) ibid. p. 155.
48a) Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 332

recht schneiden, deren Mittelpunkt in der Ebene jener Mittelpunktskurve liegt[49]).

In einer weiteren Arbeit bestimmt *Demartres* die allgemeinen isocyklischen Flächen[50]). Wenn die Ebene des erzeugenden Kreises stets Normalebene seiner Mittelpunktskurve ist, so sind die erzeugenden Kreise nur dann isotherm, wenn die Mittelpunktskurve eine logarithmische Spirale (III D 4, Nr. **16**), der Radius proportional dem Bogen derselben, gemessen vom Pol ab, ist. Die orthogonalen Trajektorien der Kreise sind Schraubenlinien[51]). Ausser den Einhüllenden einer Kugelschar sind nur diejenigen cyklischen Flächen, deren erzeugende Kreise in parallelen Ebenen liegen, durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass die Tangentialebenen längs eines erzeugenden Kreises einen Kegel umhüllen[52]).

A. Lelieuvre fand, dass die Bestimmung der Krümmungslinien einer cyklischen Fläche auf eine *Riccati*'sche Gleichung oder auf Quadraturen führt, falls die Krümmungslinien der Fläche konstant gegen die erzeugenden Kreise geneigt sind[53]).

Über Flächen, auf denen zwei Scharen von Kreisen liegen, vgl. *G. Koenigs*, Par. C. R. 109 (1889), p. 364.

Zu den Einhüllenden einer Kugelschar gehören die *Rotationsflächen*[53a]). Hier werden die Krümmungslinien von den erzeugenden Kreisen — den *Parallelen* — und den die Rotationsachse enthaltenden ebenen Schnitten — den *Meridianen* — gebildet. Letztere sind zugleich geodätische Linien. Jede Normale trifft die Rotationsachse. Dieser Treffpunkt sowie der zum Ausgangspunkt der Normalen gehörende Krümmungsmittelpunkt des Meridians fällt mit je einem Mittelpunkt der zum Ausgangspunkt der Normale gehörenden Hauptnormalkrümmungen zusammen.

5. Schraubenflächen. Eine *Schraubenfläche* entsteht durch Schraubung einer gegebenen Kurve um eine gegebene Gerade, d. h. durch Drehung der Kurve um die Gerade und Parallelverschiebung der Kurve längs der Geraden um eine Strecke, die proportional dem Drehungswinkel ist[54]). Die Proportionalitätskonstante wird der *Parameter* der Schraubenfläche genannt. Man kann die Schraubenflächen

49) Die in 42) zitierten Ann., p. 176.
50) Ann. éc. norm. (3) 4 (1887), p. 145.
51) *G. Pirondini*, Bologna, Mem. (4) 9 (1889), p. 678.
52) *A. Boulanger*, Nouv. Ann. (3) 11 (1892), p. 159.
53) Paris, C. R. 118 (1894), p. 697.
53a) Das unter 36) zitierte Werk von *Monge* p. 17.
54) „*Darboux*" 1, p. 89 (IV 3, Nrr. **18—21**).

auch kennzeichnen als die bei den infinitesimalen Schraubungstransformationen des Raumes invarianten Flächen[55]). Nehmen wir die Gerade zur z-Achse, und sind $x_0 = v\cos\alpha$, $y_0 = v\sin\alpha$, z_0 die als Funktionen von v gedachten Koordinaten der Punkte der gegebenen Kurve, so sind für φ als Drehungswinkel und g als Parameter die Gleichungen der allgemeinen Schraubenfläche diese:

$$x = v\cos(\alpha+\varphi) = x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi,$$
$$y = v\sin(\alpha+\varphi) = y_0\cos\varphi + x_0\sin\varphi,$$
$$z = z_0 + g\varphi.$$

Führen wir $\alpha+\varphi$ als neue Veränderliche u ein, so folgt:

(A) $$x = v\cos u,\quad y = v\sin u,\quad z = gu + f(v)$$

oder auch:

$$z = g\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Unter den Schraubenflächen ist die *gewöhnliche* oder *flachgängige* — von *H. A. Schwarz Meusnier*'sche genannte (Nr. **19**) — ausgezeichnet, die durch Schraubung einer die Drehungsachse senkrecht schneidenden Geraden entsteht. Man kann sie auch als geradlinige Schraubenfläche mit einer Leitebene ansehen. Hier ist $f(v) = 0$, während bei einer Rotationsfläche $g = 0$. Hingewiesen sei auf die *Röhrenschraubenfläche*, die die Einhüllende einer Schar von Kugeln mit konstantem Halbmesser ist, deren Mittelpunkte sich auf einer Schraubenlinie befinden. Sie wurde von *Th. Kuen* untersucht und modelliert, wobei die Krümmungslinien zur Anschauung gebracht sind[56]).

Eine Übersicht über die Eigenschaften der Schraubenflächen nebst Anführung zahlreicher Einzelfälle gab *M. Heckhoff*[57]).

Bei der Darstellung (A) werden die Fundamentalgrössen (III D 1, 2, Nr. **34**) der Fläche Funktionen von v allein, woraus sich ergibt, dass die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien $v = \text{const.}$ geodätische Linien sind, und dass die Bestimmung der Krümmungslinien, Haupttangentenkurven und Minimalkurven nur Quadraturen erfordert[58]). Auch die Bestimmung der geodätischen Linien der Schraubenflächen erfordert nur Quadraturen[58a]). Es gilt aber auch umgekehrt der Satz, dass, wenn die Fundamentalgrössen einer Fläche nur Funktionen des einen

55) *Lie-Scheffers*, Vorl. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891, p. 237, 246.

56) Modelle von *M. Schilling*, Halle a/S., Nr. 124.

57) Die Schraubenflächen, Bonn 1894.

58) Das unter 55) zitierte Werk p. 260.

58a) Das unter 22) zitierte Werk von *L. Aoust*, p. 187; *S. Lie*, Math. Ann. 4 (1871), p. 84; 5 (1872), p. 204; *G. Pirondini*, Giorn. di mat. 22 (1884), p. 289.

der beiden zur Darstellung der Fläche angewandten Parameters sind, die Fläche notwendig eine Schraubenfläche ist. Beweise für diesen Satz gaben *A. Enneper*[59]) und *P. Stäckel*[60]).

L. Bianchi[61]) zeigt, dass jede Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche (Nr. 8) einer Schraubenfläche wieder eine solche mit derselben Achse und demselben Parameter ist, wie sie der Ausgangsfläche eignen. Betrachtet man diejenige Schar der geodätischen Linien einer Schraubenfläche, die aus den orthogonalen Trajektorien der von den Punkten der erzeugenden Kurve beschriebenen Schraubenlinien besteht, so sind ihre Tangenten die Normalen einer Schar paralleler Flächen, die von *Bianchi Evolventen* genannt werden, während die Fläche, die mit der gegebenen zusammen die vollständige Krümmungsmittelpunktsfläche jener Evolventen bildet, als *Ergänzungsfläche* bezeichnet wird. Letztere sowie jede Evolvente ist eine Schraubenfläche, welche dieselbe Achse und denselben Parameter besitzt, wie die Ausgangsfläche[62]). Die Ergänzungsfläche einer geradlinigen Schraubenfläche ist wieder geradlinig[63]). Die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche einer gewöhnlichen Schraubenfläche mit den Gleichungen $x = v\cos u$, $y = v\cos u$, $z = gu$ können durch Schraubung je einer der beiden durch die Gleichungen:

$$\pm gz + xy = 0, \quad y^2 - x^2 = g^2$$

bestimmten Raumkurven vierter Ordnung erzeugt werden, die im unendlich fernen Punkt der Schraubungsachse einen Doppelpunkt besitzen[64]). Der Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte einer Schar von Krümmungslinien einer Schraubenfläche ist wieder eine Schraubenfläche[65]). Betrachtet man die Schraubenfläche (S_1), die der Ort ist der Mittelpunkte der ersten Krümmung der von den Punkten der erzeugenden Kurven einer Schraubenfläche (S) beschriebenen Schraubenlinien, und schneidet man (S) und (S_1) durch eine zur Schraubungsachse senkrechte und sie im Punkte (P) treffende Ebene, so ergibt sich die Schnittkurve von (S_1) aus der von (S) durch eine Transformation mittelst reziproker radii vectores, deren Pol im Punkte (P) liegt, und die den Kreis mit dem Halbmesser g ungeändert lässt[66]).

G. Pirondini[67]) bezeichnet mit h den kürzesten Abstand, mit i den Winkel zweier Geraden (L) und (R). Führt nun (L) um (R)

59) Gött. Nachr. 1870, p. 335. 60) Leipz. Ber. 1898, p. 1.
61) Giorn. di mat. 17 (1879), p. 12.
62) ibid. p. 13. 63) ibid. p. 17.
64) ibid. p. 18. 65) ibid. p. 27. 66) ibid. p. 35.
67) Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 87.

als Achse eine Schraubenbewegung mit dem Parameter g aus, so entsteht eine abwickelbare Fläche, wenn $g = h \operatorname{cotg} i$; wenn $g = h \operatorname{tg} i$, erhält man die Fläche der Binormalen der von Punkten der Geraden (L) beschriebenen Schraubenlinien. Ferner bestimmte[68]) *Pirondini* die Schraubenflächen, bei denen die erzeugende Kurve stets Haupttangentenkurve der Fläche, oder[69]) isogonale Trajektorie der von den Punkten der Kurve beschriebenen Schraubenlinien bleibt. In einer früheren Arbeit[69a]) findet *Pirondini* die Kurven, die bei der betrachteten Schraubung stets geodätische Linien der erzeugten Fläche bleiben. Unter ihnen sind die durch die Gleichungen:

$$x = f(\alpha) \cos \alpha, \quad y = f(\alpha) \sin \alpha, \quad z = -\frac{1}{g} \int f^2(\alpha)\, d\alpha$$

dargestellten Kurven die einzigen, die bei der betrachteten Schraubung zugleich orthogonale Trajektorien der von ihren Punkten beschriebenen Schraubenlinien bleiben[70]). Längs einer Geodätischen gilt die als Verallgemeinerung des *Clairaut*'schen Satzes (III D 3, Nr. **18**, p. 150) anzusehende Gleichung:

$$\sqrt{g^2 + R^2} \sin i = \text{const.},$$

wo i den Winkel bedeutet, unter dem die Geodätische die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien schneidet, und R den senkrechten Abstand des betrachteten Punktes von der Schraubungsachse[70a]). Auf der gewöhnlichen Schraubenfläche liegt eine unendliche Anzahl von Schraubenlinien, die die geraden Erzeugenden nicht senkrecht schneiden und sich auf Kreiszylindern befinden, welche die Achse der gegebenen Schraubenfläche enthalten[71]).

E. Picard zeigte[72]), dass die Schraubenflächen die einzigen Flächen sind, deren Normalen einem linearen Komplex angehören.

6. Translationsflächen. (Vgl. III D 6 a, Nr. **26**.) Mit diesem Namen belegte *S. Lie* diejenigen Flächen, die sich durch Gleichungen von der Form:

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v)$$

darstellen lassen[73]). Betrachtet man neben dem festen Koordinaten-

---

68) ibid. p. 90. 69) ibid. p. 95.

69a) Giorn di mat. 22 (1884), p. 283.

70) ibid. p. 287; Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 96.

70a) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 286.

71) Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 94.

72) Ann. éc. norm. (2) 6 (1877), p. 360.

73) Siehe die zusammenfassende Darstellung von *S. Lie* in Leipz. Ber. 44 (1892), p. 448 und 559, sowie *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen,

system ein bewegliches (ξ, η, ζ), dessen Achsen denen des festen parallel sind, so entsteht die Fläche sowohl durch Bewegung der Kurve mit den Gleichungen

$$\xi = \varphi_1(v), \quad \eta = \varphi_2(v), \quad \zeta = \varphi_3(v),$$

wenn der Anfangspunkt des beweglichen Systems die Kurve mit den Gleichungen:

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

durchläuft, als durch Bewegung der Kurve mit den Gleichungen: $\xi = f_1(u)$ u. s. w., wenn der Anfangspunkt des beweglichen Systems die Kurve mit den Gleichungen: $x = \varphi_1(v)$ u. s. w. durchläuft[74]). Sind u_0 und v_0 zwei zulässige Werte von u und v, denen der Punkt (P_0) entspricht, so hat für diesen Punkt als Anfangspunkt des ξ, η, ζ-Systems die Kurve $u = u_0$ die Gleichungen:

$$\xi = \varphi_1(v) - \varphi_1(v_0), \quad \eta = \varphi_2(v) - \varphi_2(v_0), \quad \zeta = \varphi_3(v) - \varphi_3(v_0).$$

Durchläuft (P_0) die Kurve $v = v_0$, so entsteht ebenfalls die betrachtete Fläche. Sie kann also durch Entlanggleiten jeder Parameterlinie der einen Schar längs jeder Parameterlinie der anderen Schar erzeugt werden. Als geometrische Grundeigenschaft[75]) unserer Flächen ist die zu betrachten, dass sie den Ort der Mittelpunkte aller Sehnen bildet, welche die Punkte der beiden Kurven — *Grundkurven* — mit den Gleichungen:

$$2x = f_1(u), \quad 2y = f_2(u), \quad 2z = f_3(u),$$
$$2x = \varphi_1(v), \quad 2y = \varphi_2(v), \quad 2z = \varphi_3(v)$$

verbinden. Die Parameterlinien unserer Flächen sind konjugiert[76]) und bilden ein äquidistantes System[77]) [III D 3, Nr. **40**]. Lassen sich die Punkte der beiden Grundkurven zu zweien so einander zuordnen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten der Kurven parallel sind, so besitzen die Parameterlinien der Translationsfläche eine gemeinsame Einhüllende, und diese ist eine Haupttangentenkurve der Fläche[78]).

Leipzig 1902, p. 188. Vor *Lie* wurden die Translationsflächen betrachtet von *Monge* in dem unter 36) zitierten Werk p. 111, und von *K. Peterson*, der sie *Verschiebungsflächen* nennt. (Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 68.) Die ersten Arbeiten von *Lie* über die fraglichen Flächen finden sich im Arch. for Math. og Naturv. 2 (1877) p. 157 und in den Math. Annal. 14 (1879) p. 331.

74) „*Darboux*" 1, p. 98.

75) *Lie* a. a. O. p. 449. 76) ibid. p. 449.

77) „*Darboux*" 1, p. 99.

78) *Lie* a. a. O. p. 451. *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 362.

Sind die Punkte der Grundkurven so einander zugeordnet, dass die Annahme $u = v$ jedesmal auf Tangenten führt, die sich schneiden, so ist die Translationsfläche in eine Abwickelbare eingeschrieben, deren Tangentialebenen parallel sind den durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Tangentialebenen der Translationsfläche mit den Gleichungen:

$$x = f_1(u) - \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) - \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) - \varphi_3(v).^{79})$$

Jede Translationsfläche ist eine Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung (II A 5, Nr. **43**) von der Form:

$$R(p, q)\, r + S(p, q)\, s + T(p, q)\, t = 0,$$

jedoch ist nicht umgekehrt jede Integralfläche einer solchen Gleichung eine Translationsfläche[80]). Man kommt auf die fragliche Differentialgleichung auch durch die Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, die dem Komplex der eine gegebene, in der unendlich fernen Ebene liegende, Kurve schneidenden Geraden konjugiert sind und kann hier die Gleichungen der gesuchten Flächen, die entweder Abwickelbare oder Translationsflächen sind, ohne Integration bestimmen[81]).

Von den Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen betrachtet werden können, hat *Lie* zuerst solche bestimmt, die unendlich viele Translationserzeugungen gestatten[82]). Treffen für jeden Punkt einer Fläche die beiden Haupttangenten die unendlich ferne Ebene in zwei Punkten, die hinsichtlich eines in dieser Ebene liegenden Kegelschnitts konjugiert sind, so hat man es mit einer Translationsfläche zu tun. Ist der Kegelschnitt im besondern der imaginäre Kugelkreis, so ergibt sich eine Minimalfläche (VI). Sollen jene Punkte hinsichtlich unendlich vieler Kegelschnitte in jener Ebene konjugiert sein, so müssen die Kegelschnitte ein Büschel bilden. Falls die vier Grundpunkte des Büschels getrennt liegen, erhält man die Gleichungsform:

(a) $$Ae^{mx} + Be^{my} + Ce^{mz} + D = 0.$$

Von den in den übrigen Fällen auftretenden Flächen erwähnen wir die gewöhnliche Schraubenfläche, die *Scherk*'sche Minimalfläche (Nr. **20**) und die *Cayley*'sche Linienfläche (III C 6).

Die Flächen mit vierfacher Translationserzeugung bestimmte *Lie*

---

79) *Lie* a. a. O. p. 454. 80) *Lie* a. a. O. p. 455.

81) *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 376, 381.

82) Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 477. Vgl. *R. Kummer,* Inaug.-Dissert., Leipzig 1894 (mit Abbildungen der *Scherk*'schen und *Cayley*'schen Fläche); *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 364, 410.

auf zwei Wegen[83]), von denen der spätere[83a]) das *Abel*'sche Theorem (II B 2, Nr. 41 f.) zu Hilfe nimmt. Hier findet sich namentlich die Gleichungsform:

(b) $$Ae^{x+z} + Be^{y+z} + Ce^{x+y} + Le^{x} + Me^{y} + Ne^{z} = 0.$$

Die durch die Gleichungen (a) und (b) gekennzeichneten Flächen gehören zu denjenigen Translationsflächen, die sich durch logarithmische Abbildung aus den von *F. Klein* und *S. Lie*[83b]) betrachteten, durch vertauschbare projektive Transformationen in sich selbst übergehenden, Flächen — „*W*-Flächen" — herleiten lassen[83c]).

Lie zeigt in Erweiterung seiner später (Nr. 27) zu besprechenden Untersuchungen über Minimalflächen, dass es eine diskrete Anzahl von Translationsflächen mit Grundkurven, deren Tangentialrichtungen eine und dieselbe irreduzible (I B 1 b, Nr. 5) Gleichung

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

befriedigen, gibt, die einer gegebenen Abwickelbaren längs einer gegebenen Kurve eingeschrieben werden können[84]). Diese Flächen werden durch Quadraturen gefunden. Weiter untersucht *Lie* die Aufgabe, eine derartige algebraische Translationsfläche in eine algebraische Abwickelbare einzuschreiben[85]) und löst das Problem für die Gleichungsform der Fläche: $z = f(x) + \varphi(y)$.[86])

7. Spiralflächen. Die fraglichen Flächen sind zuerst betrachtet von *K. Peterson*[87]), der sie als Flächen hinstellt, „die wir nur in einer anderen Stellung zu betrachten haben, um sie bei ungeänderter Form in anderem Massstabe zu haben". Von diesem Gesichtspunkt aus erscheinen die fraglichen Flächen als die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x - \frac{y}{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(y + \frac{x}{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} z = 0$$

und besitzen die endliche Gleichung:

---

83) Der erste Arch. Math. og Naturv. 7 (1882), p. 155.

83a) Par. C. R. 114 (1892), p. 334; Leipz. Ber. 48 (1896), p. 141. Vgl. *G. Wiegner,* Inaug.-Dissert., Leipzig 1893 (mit Abbildungen von Modellen); *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf. p. 404, 407.

83b) Par. C. R. 70 (1870), p. 1222, 1275; Math. Ann. 4 (1871), p. 83; *Lie-Engel,* Theorie der Transformationsgruppen 3 (1893), p. 193. Vgl. *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 490.

83c) *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 356.

84) Leipz. Ber. 44 (1892), p. 459. 85) ibid. p. 461, 468.

86) ibid. p. 559; Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 334.

87) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 75. Vgl. *P. Stäckel,* Leipz. Ber. 1898, p. 15.

$$\log z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + f\left(\log \sqrt{x^2+y^2} - k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$$

für k als willkürliche Konstante und f als willkürliche Funktion.

M. Lévy[88]) kommt auf die Spiralflächen, indem er eine ebene Kurve betrachtet, die sich um eine in ihrer Ebene gelegene Gerade dreht und sich dabei so ändert, dass sie sich stets ähnlich bleibt hinsichtlich eines auf der Geraden gelegenen Punktes. So erhält er, wenn die Gerade mit der z-Achse zusammenfällt, die Gleichung:

$$n \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) + \log z$$

für n als Konstante und φ als willkürliche Funktion.

Bei *S. Lie* treten die Spiralflächen als Flächen auf, die bei einer infinitesimalen *Spiraltransformation* des Raumes, d. h. einer solchen, die aus einer Drehung um eine Achse und einer Ähnlichkeitsformation von einem Punkt der Achse aus zusammengesetzt ist, invariant bleiben[89]). Bei *G. Darboux* führt die Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit r und die gleichzeitige Ähnlichkeitstransformation mit dem konstanten Modul h einer Kurve, deren Koordinaten $x_0 = r_0 \cos \omega_0$, $y_0 = r_0 \sin \omega_0$, z_0 sind, auf die Flächengleichungen:

$$x = r_0 e^{ht} \cos(\omega_0 + rt), \quad y = r_0 e^{ht} \sin(\omega_0 + rt), \quad z = z_0 e^{ht},$$

wo t als veränderlich aufzufassen ist[90]). *P. Stäckel* gibt bei der Beantwortung der Frage, unter welchen Umständen die allgemeine analytische Spiralfläche reell ist, oder algebraisch ist, der Gleichung unserer Flächen die Form:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \Omega\left(\sqrt{x^2+y^2}\, e^{-k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}\right)$$

für Ω als willkürliche Funktion[91]).

Auch der folgende Weg führt auf die Spiralflächen. Gegeben sei eine Kurve, ein Punkt (P) und eine ihn enthaltende Gerade (L). Man lasse nun jeden Punkt der Kurve eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden desjenigen den Punkt enthaltenden Kreiskegels beschreiben, dessen Achse die Gerade (L), dessen Mittelpunkt der Punkt (P) ist, jedoch so, dass der radius vector der senkrechten Projektion jedes Kurvenpunktes auf eine zu (L) senkrechte Ebene sich mit konstanter

88) Paris, C. R. 87 (1878), p. 288.

89) *Lie-Scheffers*, Vorl. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891, p. 243, 260, woselbst Litteratur; *Lie-Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, p. 162.

90) „*Darboux*“ 1, p. 108.

91) Leipz. Ber. 1898, p. 17.

Winkelgeschwindigkeit um (L) bewegt. Eine weitere Erzeugung der Spiralflächen gab *A. Demoulin*[91a]).

Nehmen wir in den *Darboux*'schen Gleichungen die Grössen r_0, ω_0, z_0 als Funktionen der Veränderlichen ϑ, so erhält das Quadrat des Linienelements der Fläche die Form:

$$ds^2 = e^{2ht}(Adt^2 + 2Bdtd\vartheta + Cd\vartheta^2),$$

wo A, B, C nur von ϑ abhängen[92]). Daher ist es durch eine Quadratur möglich, die orthogonalen Trajektorien der auf der Fläche liegenden Kegelloxodromen (III D 4, Nr. **34**) $\vartheta = \text{const.}$ zu bestimmen, und durch eine weitere Quadratur den Ausdruck

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + U^2dv^2)$$

zu erhalten, wo U nur von u abhängt. Mit Hülfe ähnlicher Eigenschaften der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zeigt man den auch aus der allgemeinen Theorie der infinitesimalen Transformationen (II A 6) sich ergebenden Satz, dass die Krümmungslinien, die Haupttangentenkurven und die Minimalkurven einer Spiralfläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen[93]). Die Auffindung der geodätischen Linien der Spiralflächen führte *S. Lie*[93a]) und später *G. Darboux* auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zurück[94]); die Bestimmung des Linienelements derjenigen Spiralflächen, auf denen die Kurven, längs welcher sich das *Gauss*'sche Krümmungsmass der Fläche nicht ändert, geodätisch parallel sind, hat *L. Raffy* ausgeführt[95]).

III. Krümmungsmittelpunktsflächen.

8. Erklärungen. Den Ort der Mittelpunkte der Hauptnormalkrümmungen einer Fläche pflegt man die *Krümmungsmittelpunktsfläche* oder *Zentrafläche* oder *Evolute* der gegebenen Fläche zu nennen. Da ein Flächenpunkt zwei Hauptkrümmungsmittelpunkte bestimmt, muss die Krümmungsmittelpunktsfläche aus zwei Schalen bestehen. Dieselben bilden den Ort der Gratlinien der abwickelbaren Normalenflächen, welche durch die Einzelkurven der beiden Scharen der Krümmungslinien der gegebenen Fläche gehen. Die Normalen der Ausgangsfläche berühren somit die Krümmungsmittelpunktsfläche, d. h. mit anderen Worten, die letztere ist die Brennfläche (Nr. **30**; III D 6 a, Nr. **13**) des Normalensystems der ersteren. Bezeichnen wir die beiden Haupt-

91a) Par. soc. math. Bull. 23 (1895), p. 203.
92) „*Darboux*" 1, p. 109, 3, p. 73.
93) Das erste unter 89) zitierte Werk, p. 261.
93a) Math. Ann. 5 (1872), p. 204. 94) „*Darboux*" 3, p. 83.
95) Par. soc. math. Bull. 20 (1892), p. 22.

krümmungshalbmesser der gegebenen Fläche mit R_1 und R_2, die Richtungskosinus ihrer Normalen mit X, Y, Z, so ist die zu R_1 gehörende Schale durch die Gleichungen:

$$x' = x + R_1 X, \quad y' = y + R_1 Y, \quad z' = z + R_1 Z,$$

die zu R_2 gehörende durch die Gleichungen:

$$x'' = x + R_2 X, \quad y'' = y + R_2 Y, \quad z'' = z + R_2 Z$$

gegeben[96]). Hier tritt nun zunächst die Frage auf, unter welchen Umständen eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve ausartet.

9. Die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche artet in eine Kurve aus. Artet eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve aus, so ist die Normalkrümmung jeder Einzelkurve in der zugehörigen Schar von Krümmungslinien der Ausgangsfläche konstant. Diese Krümmungslinien sind Kreise. Die Ausgangsfläche ist die Einhüllende einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen (Nr. 4). Bezeichnet s die Bogenlänge dieser Kurve, und ist R eine beliebig gewählte Funktion von s, so trage man auf jeder Tangente der Kurve vom Berührungspunkte aus die Strecke $-R\frac{dR}{ds}$ ab und wähle den erhaltenen Endpunkt der Strecke zum Mittelpunkte eines Kreises, dessen Ebene senkrecht zur Strecke, dessen Radius gleich $R\sqrt{1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$ ist. Die fraglichen Kreise bilden eine Fläche, für welche die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche durch die gewählte Kurve vertreten wird[97]). Hierher gehören die von *S. Finsterwalder* modellierten Flächen, auf denen die zweite Schar der Krümmungslinien aus sphärischen Kurven besteht[98]).

10. Beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche arten in Kurven aus. Dupin'sche Cyklide. Besonderes Interesse beansprucht der Fall, in dem beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche in Kurven ausarten. *Ch. Dupin*[99]) zeigte mittels geometrischer Betrach-

96) Die Krümmungsmittelpunktsflächen dürften zuerst von *G. Monge* betrachtet sein; s. das unter 36) zitierte Werk p. 134. Die hier p. 137 befindliche Behauptung, dass der Schnittlinie der beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche auf der Ausgangsfläche eine Kreispunktslinie entspricht, ist von *E. E. Kummer* berichtigt, Berlin. Monatsber. 1862, p. 426. Über die allgemeine Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen vgl. *„Darboux"* 3, p. 334, *„Bianchi"*, p. 234; *v. Lilienthal,* Math. Ann. 30 (1887), p. 1 und 38 (1891), p. 450.

97) *G. Monge* hat dieser Fläche und im besonderen ihrer Differentialgleichung die Kapitel 22 und 26 der Application gewidmet.

98) Modelle von *M. Schilling*, Halle a/S., Nr. 86—88.

99) Applications de Géométrie et de Mécanique, Paris 1822, p. 200.

tungen, dass hier die Ausgangsfläche die Einhüllende einer Schar von Kugeln ist, die sämtlich drei feste Kugeln berühren, ferner, dass die fraglichen beiden Kurven zwei Fokalkegelschnitte sind, d. h. solche, von denen jeder der Ort der Spitzen aller Kreiskegel ist, die durch den anderen gehen (III C 4). Man hat die in Rede stehende Fläche die *Dupin'sche Cyklide* genannt[100]).

Unter ihren Formen ist die einfachste der sogenannte „Kreiswulst", d. h. die Umdrehungsfläche eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Achse[101]).

J. Liouville bewies[102]) mit Hülfe der Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien, dass die Krümmungslinien der *Dupin*'schen Cyklide aus lauter Kreisen bestehen. Es mögen die drei festen Kugeln sich in den beiden Punkten P_1 und P_2 schneiden. Macht man den ersteren zum Pol einer solchen Transformation, so gehen jene Kugeln in drei Ebenen über, und die Cyklide wird in einen Kreiskegel umgewandelt, dessen Spitze der dem Punkte P_2 entsprechende Punkt ist.

A. Mannheim zeigte[103]), dass man eine *Dupin*'sche Cyklide durch die Transformation mittels reziproker Radien in einen Kreiswulst verwandeln kann, wenn der Pol der Transformation auf einem die drei festen Kugeln senkrecht schneidenden Kreise liegt, dessen Ebene die Mittelpunkte der drei Kugeln enthält. Aus den Eigenschaften des Kreiswulstes leitet *Mannheim* solche der Cyklide her und findet u. a., dass die beiden auf der Fläche liegenden Kreisscharen von zwei Ebenenbüscheln ausgeschnitten werden, deren Achsen zu einander senkrecht sind. — Die sämtlichen *Dupin*'schen Cykliden, deren Normalen durch dieselben beiden Fokalkegelschnitte gehen, bilden eine Schar von Parallelflächen. Eine anschauliche Erzeugung der fraglichen Cykliden gab *W. Roberts*[104]). Er betrachtet zunächst eine besondere

---

100) Modelle von *M. Schilling*, Halle a/S., Nr. 79—85, modelliert von *P. Vogel*, *E. E. Kummer* und *S. Finsterwalder*. Vgl. *E. Liebheit*, Inaug.-Dissert. Halle a/S. 1886; *F. Klein*, Einleitung in die höhere Geom., autogr. Vorl. 1, Göttingen 1893, p. 111.

101) Vgl. die Artikel von *Godart*, *Nombel*, *Dyrion*, *G. Gerono* in Nouv. Ann. (2) 4 (1865). Die fragliche Fläche wird von *E. Greve spirische Oberfläche* genannt, Inaug. Dissert. Göttingen (1875), wo die Schnitte der Fläche mit Ebenen untersucht sind.

102) J. de math. (1) 12 (1847), p. 282.

103) Nouv. Ann. (1) 19 (1860), p. 67. Vgl. *G. Darboux*, Sur une classe remarquable etc., Paris 1873, p. 242.

104) Paris, C. R. 53 (1861), p. 799. Vgl. die *Laguerre*'sche Erzeugung der Cyklide, Par. Soc. Philomat. Bull. 7 (1870), p. 209.

Cyklide. Man nehme in einer Ebene (E) zwei sich schneidende Kreise K_1 und K_2 mit demselben Halbmesser (r) und den Mittelpunkten C_1 und C_2. Vom Mittelpunkt der Strecke C_1C_2 aus ziehe man eine Gerade (L), welche K_1 und K_2 in den auf derselben Seite der Strecke C_1C_2 gelegenen Punkten P_1 und P_2 schneiden möge. Über der Strecke P_1P_2 als Durchmesser beschreibe man den Kreis K, dessen Ebene senkrecht zur Ebene der Kreise K_1, K_2 ist. Der Ort der Kreise K für alle Richtungen der Geraden (L) ist die fragliche Cyklide. Die Darstellung der Koordinaten dieser Fläche mit Hülfe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser als Parametern ist von *Strebor* gegeben[105]). Die von den Normalen der Fläche getroffene Fokalellipse wird im betrachteten Fall von dem Schnittpunkt (M) der Geraden C_1P_1 und C_2P_2 beschrieben. Um eine Parallelfläche unserer Fläche zu erhalten, trage man von P_1 und P_2 aus nach (M) hin eine willkürlich gewählte Strecke h ab. Gelangt man so zu den Punkten P_1' und P_2' und beschreibt über $P_1'P_2'$ als Durchmesser wie vorhin einen zur Ebene der Kreise K_1, K_2 senkrechten Kreis, so ist der Ort des letzteren die verlangte Fläche. Die Punkte P_1' und P_2' bewegen sich auf Kreisen K_1' und K_2', die mit $r + h$ und $r - h$ als Radien um die Punkte P_1 und P_2 beschrieben sind. Die Bemerkung, dass die Linie $P_1'P_2'$ stets durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1' und K_2' geht, führt zu der folgenden von *A. Cayley*[106]) und *E. Catalan*[107]) angegebenen Erzeugung der *Dupin*'schen Cyklide. Man nehme in derselben Ebene zwei Kreise und lege durch einen Ähnlichkeitspunkt derselben eine Gerade, die den einen Kreis im Punkte P_1', den anderen im Punkte P_2' schneide, wobei die Punkte P_1' und P_2' so gewählt werden müssen, dass in ihnen die Kreistangenten nicht parallel sind. Der über $P_1'P_2'$ als Durchmesser beschriebene und senkrecht zur Ebene der Grundkreise stehende Kreis erzeugt die verlangte Fläche. Sie ist von der vierten Ordnung. Ersetzt man den zweiten der beiden Kreise durch eine Gerade (L), so geht der innere Ähnlichkeitspunkt in den Punkt (O) über, in dem die vom Mittelpunkt des ersten Kreises aus auf die Gerade (L) gefällte Senkrechte diesen Kreis schneidet. Jede durch (O) gelegte Gerade trifft den Kreis in einem Punkt P_1 und die Gerade (L) in einem Punkt P_2. Der über der Strecke P_1P_2 als Durchmesser beschriebene, senkrecht zur Zeichenebene stehende, Kreis erzeugt eine Fläche dritter Ordnung,

105) Nouv. Ann. (2) 1 (1862), p. 170; (2) 4 (1865), p. 169. *Strebor* ist Pseudonym für *W. Roberts*.

106) Quarterly Journ. of Math. 12 (1873), p. 148 = Papers 9, p. 64.

107) Nouv. Corresp. Math. 6 (1880), p. 439.

die sogenannte *parabolische Cyklide*, deren Krümmungsmittelpunksfläche durch zwei Fokalparabeln vertreten wird[108]). Je nachdem bei der *Cayley*'schen Konstruktion der eine Kreis innerhalb oder ausserhalb des anderen liegt, oder den letzteren schneidet, hat man es mit der *Ring-*, der *Spindel-* oder der *Horncyklide* zu thun. Ebenso ergibt sich die *parabolische Horncyklide* oder die *parabolische Spindelcyklide*, je nachdem die Gerade (L) den zu Grunde gelegten Kreis schneidet oder nicht. Die unter [100]) zitierten Modelle bringen diese Fälle zur Anschauung.

In einer Arbeit von *J. C. Maxwell*[109]) befindet sich die folgende Konstruktion der *Dupin*'schen Cyklide. Man stelle eine Ellipse durch die Gleichungen dar:

$$x_1 = a\cos\alpha, \quad y_1 = \sqrt{a^2 - e^2}\sin\alpha, \quad z_1 = 0,$$

dann sind die Gleichungen ihrer Fokalhyperbel:

$$x_2 = \frac{e}{\cos\beta}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - e^2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Ist P ein Punkt der Ellipse, Q ein Punkt der Hyperbel, so hat die Strecke $\overline{PQ}$ die Masszahl $\frac{a}{\cos\beta} - e\cos\alpha$. Bezeichnet $\varkappa$ eine Konstante, und trägt man auf $\overline{PQ}$ von P aus die Strecke $PR = \varkappa - e\cos\alpha$ oder von Q aus die Strecke $\frac{a}{\cos\beta} - \varkappa$ ab, so beschreibt der Punkt R eine *Dupin*'sche Cyklide. Letztere erscheint hier als Einhüllende jeder der beiden durch die Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \left(\varkappa - \frac{e}{a}x_1\right)^2$$

$$(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 = \left(\varkappa - \frac{a}{e}x_2\right)^2$$

dargestellten Kugelscharen[110]).

11. Allgemeine Krümmungsmittelpunktsfläche. Sehen wir von dem Fall ab, in dem die betrachtete Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche in eine Kurve ausartet, so gelten die folgenden allgemeinen Sätze, bei deren Mitteilung wir die Krümmungslinien der Ausgangsfläche in eine *erste, zu R_1 gehörende* und eine *zweite, zu R_2 gehörende* Schar teilen und die durch die erste Schar bestimmte Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ins Auge fassen. 1) Die Normalen der Schale sind den Tangenten der ersten Schar von Krümmungslinien der Ausgangsfläche parallel. Infolge dessen scheinen sich die beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche, von einem Punkt einer

108) *A. Cayley,* [106]) Papers 9, p. 73.
109) Quarterly Journ. of Math. 34 (1867) = Papers 2, p. 144.
110) „*Darboux*" 2, p. 268. *Dupin,* Développements, p. 18.

gemeinsamen Tangente aus gesehen, senkrecht zu schneiden[111]). 2) Den Krümmungslinien der ersten Schar auf der Ausgangsfläche entsprechen auf der Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche geodätische Linien[112]), deren Tangenten die Normalen der Ausgangsfläche sind. Den Krümmungslinien der zweiten Schar entsprechen auf der Schale die jenen geodätischen Linien konjugierten Kurven, und ihre Tangenten[113]) sind die Krümmungsachsen [III D 1, 2, p. 74] der Krümmungslinien der ersten Schar auf der Ausgangsfläche. 3) Die orthogonalen Trajektorien jener geodätischen Linien entsprechen den Kurven $R_1 = \text{const.}$ auf der Ausgangsfläche[114]). Die geodätische Krümmung dieser orthogonalen Trajektorien ist $\frac{1}{R_2 - R_1}$.[115]) Der geodätische Krümmungsmittelpunkt ist also der dem betrachteten Punkt auf der ersten Schale entsprechende Punkt der zweiten Schale. Bei den abwickelbaren Flächen besteht die Krümmungsmittelpunktsfläche nur aus einer Schale, die wiederum abwickelbar ist. Hier sind die fraglichen Trajektorien geodätische Linien. 4) Es sei P der betrachtete Punkt der Ausgangsfläche, S_1 die betrachtete Schale, und auf ihr M_1 der P entsprechende Punkt. Die Krümmungsachse der P durchziehenden Krümmungslinie der zweiten Schar schneidet die zu M_1 gehörende Normale von S_1 in einem Punkt, dessen Abstand von M_1 gleich $K_2\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$ ist, wo K_2 den geodätischen Krümmungsradius der gedachten Krümmungslinie bedeutet. Bestimmt man die Kurve, längs derer S_1 von dem Zylinder berührt wird, dessen Erzeugende parallel der Normalen der Ausgangsfläche in P sind, und projiziert diese Kurve senkrecht auf die in P berührende Tangentialebene, so erweist sich jener Abstand als dem Krümmungshalbmesser der Projektionskurve in P gleich[116]). 5) Die Fläche S_1 besitzt ihrerseits eine Krümmungsmittelpunktsfläche, deren beide Schalen mit S_1' und S_1'' bezeichnet seien. Die durch M_1 gehende Normale von S_1 berühre S_1' in M'_1 und S_1'' in M_1''. Die zweite Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche der Ausgangsfläche werde mit S_2, der auf ihr dem Punkte P entsprechende Punkt mit M_2 bezeichnet. Ihre durch M_2 gehende Normale wird von den in M_1' und M_1'' berührenden Tangentialebenen der Flächen

111) Das unter 36) zitierte Werk von *G. Monge,* p. 136.

112) ibid. p. 137. 113) *A. Mannheim,* Paris, C. R. 74 (1872), p. 460.

114) *J. Weingarten,* J. f. Math. 59 (1861), p. 382.

115) *U. Dini,* Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (2) 2 (1869), p. 12. Vgl. *„Bianchi“,* p. 239.

116) *A. Mannheim,* Paris, C. R. 79 (1874), p. 1328. Vgl. *G. H. Halphen,* ibid. 80 (1875), p. 116.

S_1' und S_1'' in zwei Punkten N_2' und N_2'' geschnitten. Eine die Ausgangsfläche im Punkte P und zwar in der zweiten Ordnung berührende Fläche besitzt eine Krümmungsmittelpunktsfläche, deren Schalen die Flächen S_1 und S_2 in den Punkten M_1 und M_2 in der ersten Ordnung berühren, sodass für sie die Strecken M_1M_1', M_1M_1'' neue Längen, und die Geraden $M_1'N_2'$ und $M_1''N_2''$ neue Lagen erhalten. *A. Mannheim*[117]) zeigte synthetisch und nach ihm *A. Ribaucour*[118]) analytisch, dass für alle die Ausgangsfläche in P in der zweiten Ordnung berührenden Flächen die Geraden $M_1'N_2'$ und $M_1''N_2''$, sowie die analog zu erhaltenden Geraden $M_2'N_1'$ und $M_2''N_1''$ auf einem Paraboloid — dem sogenannten *Paraboloid der acht Geraden* — liegen, welchem ausserdem die Normalen der Flächen S_1 und S_2 in M_1 und M_2 und die dem Punkte entsprechenden Krümmungsachsen der Krümmungslinien der Ausgangsfläche angehören. Bezeichnen K_1 und K_2 die geodätischen Krümmungsradien dieser Krümmungslinien, und betrachtet man P als den Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen u-Achse mit der Tangente der zu R_1, dessen v-Achse mit der Tangente der zu R_2 gehörenden Krümmungslinie, und dessen w-Achse mit der Normalen der Ausgangsfläche zusammenfällt, so erhält die Gleichung jenes Paraboloids die Form:

$$w\left(\frac{u}{K_2R_1}+\frac{v}{K_1R_2}+\frac{w}{R_1R_2}\right)-\frac{u}{K_2}-\frac{v}{K_1}-w\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+1=0.$$

Sie zeigt, dass auch die Verbindungslinie der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien der Ausgangsfläche auf dem Paraboloid liegt[119]). Eine andere, von kinematischen Gesichtspunkten ausgehende Herleitung des fraglichen Paraboloids gab *Mannheim* in dem Werk „Principes et développements de géométrie cinématique", p. 224. (Vgl. *R. v. Lilienthal*, Jahresb. der deutschen Mathem.-Ver. 11 (1902), p. 44.)

Des weiteren sind anzuführen die *Ribaucour*'schen Sätze[120]): 1) Damit sich die Krümmungslinien auf beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche entsprechen, muss $R_1 - R_2$ konstant sein. *E. Beltrami*[121]) zeigte, dass, wenn man diese Konstante mit k bezeichnet, hier beide Schalen dasselbe konstante Krümmungsmass $\frac{-1}{k^2}$ besitzen. 2) Sollen auf beiden Schalen die Krümmungslinien je einem konjugierten System auf der Ausgangsfläche entsprechen, so muss $\frac{R_1}{R_2}$ konstant sein. 3) Sollen konjugierten Systemen auf der einen Schale

117) Paris, C. R. 74 (1872), p. 458. 118) ibid. p. 1399.
119) *A. Mannheim*, Paris, C. R. 84 (1877), p. 646.
120) Paris, C. R. 74 (1872), p. 1399. 121) Giorn. di Mat. 3 (1865), p. 40.

stets konjugierte Systeme auf der anderen entsprechen, so muss zwischen R_1 und R_2 eine Relation bestehen (Nr. **17**). Insbesondere entsprechen sich alsdann auf beiden Schalen die Haupttangentenkurven, und, falls das Produkt $R_1 R_2$ konstant ist, entsprechen diesen Haupttangentenkurven auf der Ausgangsfläche ebenfalls Haupttangentenkurven.

Sind φ und ψ die Winkel, welche zwei durch einen Punkt der Ausgangsfläche gehende Tangenten mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie bilden, so entsprechen ihnen, falls zwischen R_1 und R_2 eine Relation besteht, auf beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche konjugierte Tangenten, wenn:

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi \frac{dR_2}{dR_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

Diese Gleichung rührt von *A. Mannheim* her, der aus ihr auch Folgerungen für die einfacheren Gestalten der zwischen R_1 und R_2 bestehenden Gleichung ableitete[122]). Wird letztere in der Form $R_2 = f(R_1)$ angenommen, so erhält das Krümmungsmass $\varkappa_1$ der zu R_1 gehörenden Schale den Wert $\frac{-f'(R_1)}{(R_1 - R_2)^2}$ und das Krümmungsmass $\varkappa_2$ der anderen Schale den Wert $\frac{-1}{f'(R_1)(R_1 - R_2)^2}$, sodass sich der *G. H. Halphen*'sche Satz ergibt[123]):

$$\varkappa_1 \varkappa_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^4}.$$

12. Bestimmung einer Fläche, für die eine oder beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche vorgeschrieben sind. Die Lösung der Frage nach denjenigen Flächen, für welche eine Schale (S_1) ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche vorgeschrieben ist, kommt hinaus auf die Auffindung einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Linien auf (S_1) und derjenigen Schar von Parallelflächen, deren Normalen mit den Tangenten jener geodätischen Linien zusammenfallen[124]). Zwei hierhergehörende Aufgaben, bei denen die Fläche (S_1) abwickelbar ist, oder eine Kugel vorstellt, sind von *G. Monge* gelöst[125]). Ist (S_1) abwickelbar, so nennt *Monge* die Ausgangsfläche eine *surface moulure générale*[125a]) [Nr. **13**; III D 6a, Nr. **24**]. Wir führen zwei Erzeugungsarten derselben an.

---

122) Paris, C. R. 84 (1877), p. 934.

123) Par. soc. math. Bull. 4 (1876), p. 94.

124) Siehe die Arbeiten von *R. Hoppe* und *F. August,* Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 256 und 315.

125) Applic. § 25 u. 18. Vgl. *A. Enneper,* Gött. Nachr. (1871), p. 227 und (1872), p. 577.

125a) *G. Monge,* J. éc. polyt. 6 (1806), p. 1; *L. Raffy,* Leçons sur les applic. géométr. de l'analyse, Paris 1897, p. 163; *L. Raffy,* Par. soc. math. Bull. 19 (1891), p. 54.

1) Man zeichne in einer Ebene eine beliebige Kurve (c) und lasse die Ebene auf (S_1) rollen, ohne zu gleiten. Die Kurve (c) beschreibt dann eine Fläche (S), deren Krümmungsmittelpunktsfläche aus (S_1) und der Fläche (S_2) besteht, die durch die Evolute von (c) erzeugt wird. Die Kurve (c) ist in jeder ihrer Lagen Krümmungs- und geodätische Linie von (S). 2) Man nehme in einer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem (u, v-Achse) und eine beliebige Kurve (c) mit der Gleichung $v = f(u)$. Bewegt sich nun die Ebene so, dass die u-Achse auf eine Raumkurve aufgewickelt wird, indem ihr geradliniger Teil stets Tangente dieser Kurve bleibt, während die v-Achse stets der Binormale der Kurve parallel bleibt, so beschreibt (c) eine Fläche der verlangten Art. Man erhält die Gleichungen der Fläche in der Form:

$$x = x_0 + (u - s)\cos\alpha + f(u)\cos\lambda,$$
$$y = y_0 + (u - s)\cos\beta + f(u)\cos\mu,$$
$$z = z_0 + (u - s)\cos\gamma + f(u)\cos\nu,$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der Raumkurve bedeuten, s ihre Bogenlänge vorstellt, und $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bez. $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus der Tangente bez. Binormale der Raumkurve bezeichnen[125b]). — Eine weitere bemerkenswerte Erzeugungsart der betrachteten Flächen gab *G. Pirondini*[126]). Wir erwähnen eine hierher gehörende, von *J. Binet*[127]) gefundene Fläche. Man nehme an Stelle der Kurve (c) die in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = e^{\frac{\varphi}{m}}$ festgelegte logarithmische Spirale, bei der die Konstante m durch die Gleichung $m^m = e^{(4\varkappa - 1)\frac{\pi}{2}}$ bestimmt ist, für $\varkappa$ als ganze, positive Zahl. Die fragliche Spirale erzeugt eine Fläche, welche die Eigentümlichkeit darbietet, dass sie mit der Schale (S_2) ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche zusammenfällt.

Die Flächen, bei denen eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche eine Kugel ist, haben die Eigenschaft, dass die andere Schale ein Kegel ist, dessen Spitze sich im Mittelpunkt der Kugel befindet. Sie werden durch die Bewegung einer Kreisevolvente (III D 4, Nr. 6) erzeugt, deren Ebene so auf einem Kegel rollt, dass der Mittelpunkt des Kreises stets mit der Spitze des Kegels zusammenfällt[128]).

125b) *G. Pirondini*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 403.

126) Giorn. di mat. 30 (1892), p. 188.

127) J. de math. (1) 6 (1841), p. 61.

128) *G. Monge*, J. éc. polyt. 4 (an 10 = 1801), p. 28. Vgl. *J. Vályi*, Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 217; *V. de Tannenberg*, Leç. nouv. sur les applic. géom. du calc. diff., Paris 1899, p. 165.

Zwei gegebene Flächen können nur dann die beiden Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche sein, wenn das System ihrer gemeinsamen Tangenten ein Normalensystem ist. Der Umstand, dass, von einem beliebigen Punkt des Raumes aus gesehen, die Umrisse zweier konfokaler Flächen zweiter Ordnung (III C 4), aber verschiedener Art, sich rechtwinklig zu schneiden scheinen, führte *M. Chasles*[129]) auf die Bemerkung, dass zwei solche Flächen die Schalen einer Krümmungsmittelpunktsfläche sind.

IV. Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

13. Die Monge'schen Gesimsflächen. Die umfangreiche Litteratur[129a]) über Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien nimmt ihren Ausgang in der von *Monge* beantworteten Frage nach denjenigen Flächen, bei denen die Einzelkurven einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen liegen[130]) (III D 6 a, Nr. 24). Diese Flächen, von *Monge surfaces moulures* (*Gesimsflächen*) genannt, entstehen auf folgende Weise. Man zeichne in einer Tangentialebene eines Zylinders eine Kurve (*c*) und lasse die Ebene auf dem Zylinder rollen, ohne zu gleiten. Die Kurve (*c*) erzeugt die verlangte Fläche und ist in jeder ihrer Lagen eine Krümmungslinie derselben, während ihre Punkte die Krümmungslinien in parallelen Ebenen beschreiben. Die fraglichen Flächen sind durch das Vorhandensein einer Kreispunktslinie (III D 3, Nr. 4) ausgezeichnet[131]).

14. Untersuchungen von Bonnet, Serret, Enneper, Rouquet. Im Jahre 1853 veröffentlichte *O. Bonnet*[132]) seine grosse Arbeit über

129) Aperçu historique, Paris 1875, 2. Aufl., p. 392. Die weitere analytische Ausführung siehe bei *J. Liouville*, J. de math. (1) 16 (1851), p. 6; *Chasles* dasselbe Journal (2) 5 (1860), p. 442; *Enneper*, Gött. Nachr. (1871), p. 310; *F. Rudio*, Dissert. Berlin (1880) und J. f. Math. 95 (1883), p. 240; *H. R. G. Opitz*, Studie über die *Rudio*'schen Flächen, Wissensch. Beilage zum Jahresber. des Königstädtischen Realgymnasiums zu Berlin (1901). Vgl. namentlich „*Darboux*" 2, chap. 14.

129a) Vgl. die Litteraturübersicht bei *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. des Raumes 2, dritte Aufl., Leipzig 1880, Anmerk. 21, p. XXIX.

130) Applic. § 17. Vgl. *Serret-Harnack*, Lehrbuch der Diff.- u. Int.-Rechn. 2^2, p. 319, Leipzig 1885. Das *Monge*'sche Integrationsverfahren wurde von *O. Rodrigues*, Corresp. sur l'École polyt. 3 (1814), p. 169 vereinfacht. Geometrisch behandelt *J. Bertrand* die fraglichen Flächen im J. de math. (1) 13 (1848), p. 76. Vgl. *E. Bour*, J. éc. polyt. 22 (1862), p. 85.

131) *Serret-Harnack*, a. a. O. 1, p. 480 (2. Aufl. p. 467).

132) J. éc. polyt. 20 (1853), p. 117. Vgl. die vorangegangenen Mitteilungen in Paris, C. R. 36 (1853), p. 81 u. 219.

Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien. Hier handelt es sich zunächst um die nicht abwickelbaren Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien eben sind[132a]). Nach einem Satz von *F. Joachimsthal* (III D 3, Nr. 6, p. 118) bilden die Normalen einer Fläche längs einer ebenen Krümmungslinie mit der Ebene derselben einen konstanten Winkel. Das sphärische Bild einer solchen Linie ist somit ein Kreis, und man steht vor der Aufgabe, das allgemeinste aus Kreisen bestehende Orthogonalsystem auf einer Kugel zu bestimmen. *O. Bonnet* findet auf mühsame Weise die heute leicht ableitbare Thatsache, dass die fraglichen Kreisscharen durch zwei Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, deren Achsen reziproke Polaren der Kugel sind[133]). Da diese Polaren auf einander senkrecht stehen, müssen die Ebenen der Krümmungslinien die Tangentialebenen zweier Zylinder sein, deren Erzeugende sich senkrecht kreuzen[134]). *Bonnet* leitet für die fraglichen Flächen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ab[134a]) und integriert sie sowohl mit Hülfe einer geometrischen Erwägung, als mit Anwendung des *Monge*'schen Verfahrens. Die dem Resultat gegebene geometrische Deutung ist nicht anschaulich.

An zweiter Stelle werden von *Bonnet* analytisch die Flächen behandelt, von denen nur vorausgesetzt wird, dass sie *ein* System ebener Krümmungslinien besitzen. Es ergeben sich zwei geometrisch wichtige Fälle. 1) Gehen die Ebenen der fraglichen Krümmungslinien alle durch dieselbe Gerade, so liegen die Krümmungslinien des anderen Systems auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, während ihre Mittelpunkte in jener Geraden liegen. Die Halbmesser dieser Kugeln sind die — längs jeder Einzelkurve konstanten — geodätischen Krümmungsradien der letztgenannten Krümmungslinien. *Bonnet* leitet die endlichen Gleichungen der Fläche her (p. 199), die *F. Joachimsthal* bereits früher gefunden hatte[135]). Die Fläche ist ausführlich behandelt von *P. V. Rouquet*[136]). 2) Umhüllen die Ebenen (p. 201) der

132a) Die einzige abwickelbare Fläche mit ebenen Krümmungslinien ist die Tangentenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie. *H. Résal*, Exposition de la théorie des surfaces, Paris 1891, p. 52.

133) Vgl. *P. Serret*, Théorie des courbes, p. 177. 134) ibid. p. 137.

134a) Vgl. *S. Lie*, Math. Ann. 4 (1872), p. 224; *H. Résal* in dem unter 132a) zitierten Werk, p. 45.

135) J. f. Math. 23 (1842), p. 350. Daselbst sind die Gleichungen ohne Beweis veröffentlicht, die Herleitung siehe im selben Journal 54 (1857), p. 183. Vgl. „*Darboux*" 1, p. 112; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 222; *L. Raffy*, Par. soc. math. Bull. 24 (1896), p. 52. Eine besondere hierher gehörende Flächenart bei *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1902, p. 366.

136) Étude géométrique des surfaces, dont les lignes de courbure d'un système sont planes, Thèse Toulouse 1882, p. 142.

Krümmungslinien der ersten Schar einen Kegel und schneiden sie die Fläche unter einem Winkel, dessen Kosinus proportional ist dem Kosinus des Winkels, den sie mit einer festen Ebene bilden, so liegen die Krümmungslinien der zweiten Schar auf Kugeln, deren Mittelpunkte sich in einer Geraden befinden. — Im dritten Teil (p. 235) seiner Arbeit behandelt *Bonnet* die Flächen, bei denen eine Schar der Krümmungslinien aus ebenen, die andere aus sphärischen Kurven besteht. Die Kugeln, auf denen die letzteren liegen, können 1) konzentrisch sein. Dann kommt man auf die von *Monge*[137]) betrachteten Flächen, bei denen die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ein Kegel ist; 2) können die Mittelpunkte der fraglichen Kugeln auf einer Geraden liegen. Hier kommt man auf die vorhin mitgeteilten beiden Fälle; 3) können die Mittelpunkte der Kugeln eine gekrümmte, ebene Kurve bilden. Dann treten Kanalflächen (Nr. 4) auf mit ebener Leitkurve. — Weiterhin (p. 248) werden die Flächen mit lauter sphärischen Krümmungslinien betrachtet und gezeigt, dass sie entweder mit den früher erhaltenen zusammenfallen oder sich durch eine Transformation mittelst reziproker Radien aus ihnen herleiten lassen. Im vierten Teil seiner Arbeit behandelt *Bonnet* die Flächen, von denen nur angenommen wird, dass eine Schar ihrer Krümmungslinien aus sphärischen Kurven bestehe und erledigt die beiden Sonderfälle, in denen die Trägerkugeln konzentrisch sind, oder die Fläche rechtwinklig schneiden[138]).

Nach den ersten Veröffentlichungen *Bonnet*'s behandelte *J. A. Serret*[139]) ebenfalls die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien und zwar nach einer Methode, welche die Zuhülfenahme der sphärischen Abbildung nicht verlangt und die von *Bonnet* im dritten Teil seiner Arbeit ebenfalls benutzt wurde. Eine Vereinfachung der *Bonnet*'schen und *Serret*'schen Rechnungen erzielte *A. Cayley*[140]) durch einen Ansatz, der die Unterscheidung von ebenen und sphärischen Krümmungslinien unnötig macht. — Während in den erwähnten Arbeiten die Gleichung der zu bestimmenden Flächen stets in der Form $z = f(x, y)$ gedacht wird, fasst *A. Enneper*[141]) in zwei

137) Applic. § 24. Vgl. *U. Dini*, Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 140; *G. Pirondini*, Giorn. di mat. 26 (1888), p. 352.

138) Vgl. *M. Picart*, Paris, C. R. 46 (1858), p. 356; *S. Lie*, Math. Ann. 5 (1872), p. 227.

139) J. de math. (1) 18 (1853), p. 113.

140) Amer. J. of math. 11 (1889), p. 71, 293 = Papers 12, p. 601. Daselbst Litteratur.

141) Gött. Abh. 23 (1878), 26 (1880).

grossen Abhandlungen von vornherein die Koordinaten der gesuchten Flächen als Funktionen von zwei Veränderlichen auf und benutzt als Grundlage die Theorie der Raumkurven, wodurch statt partieller Differentialgleichungen gewöhnliche auftreten. Dabei wird die Frage nach den Flächen, bei denen nur eine Schar der Krümmungslinien als aus sphärischen Kurven bestehend angenommen wird, allgemein gelöst. Anlässlich einer Arbeit von *H. Dobriner*[142]) über dieselbe Frage veröffentlichte *Enneper* einen Auszug aus seinen Abhandlungen[143]).

Hinsichtlich der Flächen mit nur ebenen Krümmungslinien, von denen die eine Schar aus Kreisen besteht, gilt der *M. Picart*'sche Satz[144]), dass sie die Einhüllenden einer Schar von Kugeln sind, deren Mittelpunkte sich in einer ebenen Kurve befinden, während sich ihre Halbmesser proportional dem senkrechten Abstand des jeweiligen Mittelpunkts von einer festen, in der Ebene der Kurve gelegenen Geraden ändern. In letzterer schneiden sich die Ebenen der zweiten Schar der Krümmungslinien.

Die erwähnte Studie von *Rouquet* über Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien enthält zahlreiche Einzelheiten über den Gegenstand. Als von allgemeinerem Interesse heben wir den folgenden Umstand hervor. Wickelt man die von den Ebenen der Krümmungslinien berührte Fläche auf eine Ebene ab, so gehen die Krümmungslinien in eine ebene Kurvenschar über. Längs jeder Einzelkurve derselben liegen die Krümmungsmittelpunkte der orthogonalen Trajektorien der Schar in einer Geraden. Nimmt man die Gleichung der Schar in der Form $f(x, y, a) = 0$, so genügt die Funktion f einer Beziehung von der Gestalt[145]):

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (\varphi_1(a)\, x + \varphi_2(a)\, y + \varphi_3(a)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Dabei ist $\varphi_1(a)\, x + \varphi_2(a)\, y + \varphi_3(a) = 0$ die Gleichung der eben erwähnten Geraden. Die Schnittpunkte der Einzelkurven der Schar mit dieser Geraden, sowie ihre isotropen Tangenten (Nr. **30**) bilden somit die Einhüllende der Schar.

15. Untersuchungen von Dini, Darboux. Die Frage nach den Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien — sofern nicht die Ebenen einer Schar von solchen Linien parallel sind — behandelt *U. Dini*[146]) nach folgender Methode. Da die sphärischen Bilder der

142) J. f. Math. 94 (1883), p. 116. 143) ibid. p. 329.

144) Nouv. ann. (2) 4 (1865), p. 99. Vgl. *P. Serret*, Théorie des courbes, p. 264; *Rouquet*, Thèse, [136]), p. 20. 145) ibid. p. 91 und 104.

146) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 1^2 (1868), p. 71.

Krümmungslinien auf der Einheitskugel ein aus geodätischen Kreisen [III D 3, Nr. 38] bestehendes Orthogonalsystem bilden, kann man dem Quadrat des Linienelements der Einheitskugel hier die Form geben:

$$d\sigma^2 = \frac{f^2(u)\,du^2 + \varphi^2(v)\,dv^2}{(u+v)^2}.$$

Mit Hülfe der Fundamentalgleichungen findet *Dini* die Darstellungen:

$$R_1 = U - V - U'(u+v), \quad R_2 = U - V + V'(u+v),$$

$$X = \frac{U_1 + V_1}{u+v}, \quad Y = \frac{U_2 + V_2}{u+v}, \quad Z = \frac{U_3 + V_3}{u+v},$$

wo die Funktionen $U \ldots U_3$ nur von u, die Funktionen $V \ldots V_3$ nur von v abhängen. Es zeigt sich, dass die Funktionen U_1, U_2, U_3 bezw. V_1, V_2, V_3 die Form haben:

$$mu + n + \alpha\sqrt{hu^2 + h'u + h''}, \quad \mu v + \nu + \beta\sqrt{kv^2 + k'v + k''}.$$

Die Koordinaten der Fläche ergeben sich aus der Integration der vollständigen Differentiale:

$$dx = -R_1\frac{\partial X}{\partial u}du - R_2\frac{\partial X}{\partial v}dv, \text{ etc.}$$

Aus den *Dini*'schen Formeln folgt leicht, dass auch der Ausdruck: $Xx + Yy + Zz$ von der Form $\frac{F(u) + F_1(v)}{u+v}$ sein muss. Dies führt auf eine Untersuchung von *G. Darboux* [147]), bei der die zu bestimmenden Flächen als die Schar ihrer Tangentialebenen einhüllend betrachtet werden. *Darboux* leitet zunächst den folgenden Satz ab: Genügen die Funktionen A_1, A_2, A_3, A_4 des Parameters α und die Funktionen B_1, B_2, B_3, B_4 des Parameters β der Beziehung:

$$(A_1 + B_1)^2 + (A_2 + B_2)^2 + (A_3 + B_3)^2 = (A_4 + B_4)^2,$$

so werden die Tangentialebenen der fraglichen Flächen durch die Gleichung

$$(A_1 + B_1)x + (A_2 + B_2)y + (A_3 + B_3)z = A + B$$

dargestellt, wo A wiederum nur von α, B nur von β abhängt. Die Bestimmung der Funktionen $A_1 \ldots A_4$, $B_1 \ldots B_4$ führt auf die *Dupin*'sche Cyklide (Nr. **10**), und so wird folgende Erzeugung obiger Flächen gefunden: Man nehme zwei einfach unendliche Scharen von Kugeln, deren Mittelpunkte auf zwei Fokalkegelschnitten liegen, während sich ihre Radien nach einem beliebigen Gesetz ändern. Die Radikalebenen je zweier Einzelkugeln, die nicht derselben Schar angehören, werden von einer der gesuchten Flächen eingehüllt.

147) „*Darboux*“ 1, p. 127; 4, p. 180.

Die oben skizzierte Methode benutzt *Dini* auch zur Bestimmung der Flächen, auf denen nur eine Schar der Krümmungslinien als eben angenommen wird. Es kommt hier alles darauf an, das Quadrat des Linienelements der Einheitskugel aufzufinden, falls die eine Schar der als orthogonal vorausgesetzten Parameterlinien aus Kreisen besteht. Dies führt auf eine *Riccati*'sche Differentialgleichung[148]). Nach Integration derselben ergeben sich die Werte von R_1 und R_2 und weiter die von x, y, z durch Quadraturen. Jene Bestimmung des Linearelements der Einheitskugel führte *Dini* in einer späteren Arbeit[149]) weiter aus und betrachtete im besonderen den Fall, in dem die Ebenen der Krümmungslinien mit einer Geraden denselben Winkel bilden. — Erwähnt sei noch eine Arbeit von *G. Pirondini*[150]) über Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien, sowie die Untersuchung von *Darboux* über das Verhältnis der Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien zu den isotropen, abwickelbaren Flächen[151]) (Nr. **40**). Besonders hingewiesen sei ferner auf die in Ebenenkoordinaten durchgeführte *Darboux*'sche Bestimmung der Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien[152]). Diese Methode führt auch für Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien zum Ziel mit Hülfe der Bemerkung, dass die Tangentialebenen einer Fläche längs einer sphärischen Krümmungslinie eine Kugel berühren, die mit der Trägerkugel der Krümmungslinie konzentrisch ist[153]).

16. Untersuchungen von Brioschi, Dini, Dobriner, Blutel, Darboux. *F. Brioschi* fand folgende Eigenschaft sphärischer Krümmungslinien[154]). Fallen die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien zusammen, und ist $\frac{1}{R_1}$ die Normal-, $\frac{1}{K_1}$ die geodätische Krümmung der sphärischen Kurven $v = \text{const.}$, so hat man:

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{r \sin V} + \frac{\operatorname{cotg} V}{R_1},$$

wo r den Halbmesser der Trägerkugel, V den Winkel bedeutet, den dieser Halbmesser mit der Flächennormalen bildet. *Dini*[155]) betrachtet die Koordinaten X, Y, Z der Einheitskugel so als Funktionen von u und v, dass das Quadrat des Linienelements die Form hat: $d\sigma^2 = E' du^2 + G' dv^2$. Die Gleichungen:

148) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 23.
149) Pisa, Ann. delle Università Toscane 11 (1869).
150) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 118.
151) „*Darboux*" 4, p. 203, 254. 152) „*Darboux*" 4, p. 200.
153) „*Darboux*" 4, p. 240. 154) Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 301.
155) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869), p. 135.

$$x = V_1 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial X}{\partial v} + r \cos V \cdot X, \quad y = V_2 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial Y}{\partial v} + r \cos V \cdot Y,$$
$$z = V_3 + \frac{r \sin V}{\sqrt{G'}} \frac{\partial Z}{\partial v} + r \cos V \cdot Z,$$

in denen V_1, V_2, V_3, r, V Funktionen von v allein bedeuten, stellen nun, falls:

$$X \frac{dV_1}{dv} + Y \frac{dV_2}{dv} + Z \frac{dV_3}{dv} + \frac{dr \cos V}{dv} = r \sin V \sqrt{G'},$$

eine Fläche dar, für die 1) X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen sind, 2) u, v die Parameter der Krümmungslinien bedeuten, 3) die Kurven $v =$ const. auf Kugeln liegen, deren Mittelpunkte die Koordinaten V_1, V_2, V_3 besitzen.

Hinsichtlich der Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien bemerkt *H. Dobriner*[156]), dass es zu jeder von ihnen noch unendlich viele andere mit derselben Eigenschaft gibt, die mit ihr das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein haben, und dass unter diesen auch solche vorhanden sind, bei denen die Trägerkugeln der Krümmungslinien alle durch einen Punkt gehen. Betrachten wir zwei solche Flächen, so besitzen die Mittelpunktskurven der beiden Scharen der Kugeln, auf denen ihre sphärischen Krümmungslinien liegen, in entsprechenden Punkten C und C' parallele Tangenten. *E. Blutel*[157]) fand, dass die abwickelbaren Normalenflächen längs zweier sich entsprechender Krümmungslinien auf beiden Flächen durch eine Ähnlichkeitstransformation aus einander hervorgehen. Die durch sich entsprechende Punkte jener Mittelpunktskurven gelegten Geraden erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie von der Geraden $\overline{CC'}$ im Punkte C_0 berührt werde. Dann ist C_0 der Pol jener Transformation, und das Ähnlichkeitsverhältnis ist gleich dem Verhältnis der Strecke CC_0 zu CC'. Auf Grund dieser Sätze lässt sich schliessen, dass die Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien aus denen mit einer Schar ebener erhalten werden, wenn man letztere der Transformation mittelst reziproker Radien unterwirft und zu den so gewonnenen Flächen diejenigen bestimmt, die sowohl mit ihnen das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein haben, als mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien ausgestattet sind[158]).

Hingewiesen sei noch auf die Behandlung des Problems der ebenen und sphärischen Krümmungslinien bei *E. Wälsch*, Festschrift der technischen Hochschule Brünn 1899, wo die Koordinaten eines

156) J. f. Math. 94 (1883), p. 118, 125.
157) Paris, C. R. 116 (1893), p. 249.
158) „*Darboux*“ 4, p. 245.

Punktes der fraglichen Flächen als explizite Funktionen zweier Parameter ausgedrückt werden, sowie auf eine besondere Art hierhergehörender Flächen bei *G. Scheffers*, Leipz. Ber. 1902, p. 367.

V. Weingarten'sche Flächen.

17. Die beiden Weingarten'sche Sätze. Auf die Eigenschaften der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist, wies zuerst *J. Weingarten* hin, weshalb man heute jene Flächen *Weingarten*'sche oder kurz *W-Flächen*[158a]) nennt. (Vgl. auch III D 6 a, Nr. **31**.) Jede Umdrehungs- und jede Schraubenfläche ist eine W-Fläche. Die kennzeichnende geometrische Eigenschaft der W-Flächen besteht darin, dass die Kurvenscharen $R_1 = \text{const.}$, $R_2 = \text{const.}$ zusammenfallen, sodass es nicht möglich ist, die Grössen R_1 und R_2 zu Parametern zu wählen. — Die zu R_1 gehörenden Krümmungslinien mögen als Kurven $v = \text{const.}$ in Rechnung gesetzt werden. Nehmen wir ausser diesen die Kurven $R_1 = \text{const.}$ zu Parameterlinien, so nimmt nach *Weingarten*[159]) das Quadrat des Linienelements der zu R_1 gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche die Gestalt an:

$$ds^2 = (dR_1)^2 + e^{2\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}} dv^2.$$

Danach sind die Krümmungsmittelpunktsflächen aller Flächen, bei denen R_2 dieselbe Funktion von R_1 ist, auf einander und im besonderen auf eine unter ihnen befindliche Rotationsfläche abwickelbar[160]). Umgekehrt lässt sich mit Hülfe jeder auf eine Umdrehungsfläche abwickelbaren Fläche eine W-Fläche finden. Es bilden nämlich die Tangenten derjenigen geodätischen Linien der ersten Fläche, die bei der Abwicklung in die Meridiane der Umdrehungsfläche übergehen, das Normalensystem einer Parallelschar von W-Flächen[161]). — Ein zweiter Satz[162]) bezieht sich auf den Zusammenhang der W-Flächen mit einer gewissen Form des Quadrats des Linienelements der Einheitskugel. Sind die Koordinaten X, Y, Z der letzteren in der Art als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u und v ausgedrückt, dass:

$$\sum dX^2 = E' du^2 + \Phi(E')\, dv^2,$$

so nehme man: $E' = \frac{1}{\varkappa^2}$, $\Phi(E') = \frac{1}{\vartheta'(\varkappa)^2}$. Alsdann stellen die Ausdrücke:

158a) Man verwechsle diese nicht mit den *Klein-Lie*'schen W-Flächen (Nr. 6).
159) J. f. Math. 59 (1861), p. 382.
160) Vgl. „*Bianchi*", p. 246 u. 248.
161) „*Darboux*" 3, p. 328. 162) J. f. Math. 62 (1863), p. 160.

$$x = \int \left\{ \vartheta(\varkappa) \frac{\partial X}{\partial u} du + (\vartheta(\varkappa) - \varkappa \vartheta'(\varkappa)) \frac{\partial X}{\partial v} dv \right\}, \text{ etc.}$$

die Koordinaten einer Fläche dar, für welche die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind, die Grössen X, Y, Z die Bedeutung der Richtungskosinus der Normalen besitzen, und die Hauptkrümmungshalbmesser durch $-\vartheta(\varkappa)$ und $-\vartheta(\varkappa) + \varkappa\vartheta'(\varkappa)$ gegeben werden, sodass zwischen diesen die durch Elimination von $\varkappa$ zu erhaltende Beziehung besteht. Das Quadrat des Linienelements der zu $R_1 = -\vartheta(\varkappa)$ gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche nimmt dabei die Form an:

$$\vartheta'(\varkappa)^2 d\varkappa^2 + \varkappa^2 dv^2.$$

Die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \varkappa + a$ führt auf die Röhrenflächen[162a]) (Nr. 4), die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \frac{\varkappa^2}{2}$ auf die Minimalflächen (Nr. 19 ff.), d. h. Flächen, bei denen $R_1 + R_2 = 0$. Zu diesen Fällen fügte *Weingarten* noch einen dritten hinzu, indem er nachwies, dass die Voraussetzung $\vartheta(\varkappa) = \frac{1}{2}(\arcsin \varkappa + \varkappa\sqrt{1-\varkappa^2})$ auf die Flächen mit der Eigenschaft:

$$2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$$

führt[163]). *Darboux* fand die folgende Erzeugung dieser Flächen. Man betrachte zwei Kurven mit absolut gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Torsionen. Ist P ein beliebiger Punkt der einen, P_1 ein beliebiger Punkt der anderen Kurve, so ist der Ort des Mittelpunkts (M) der Strecke $P\overline{P_1}$ eine Translationsfläche (Nr. 6). Zieht man durch jeden Punkt M dieser Fläche eine Gerade, die der Schnittlinie der Schmiegungsebenen der gegebenen Kurven in P und P_1 parallel ist, so bilden diese Geraden das Normalensystem der fraglichen W-Fläche[164]).

U. Dini[165]) gründet seinen Beweis des letzten *Weingarten*'schen Satzes auf die Fundamentalgleichungen, wie sie für den Fall gelten, dass die Krümmungslinien mit den Parameterlinien zusammenfallen. Dabei ergibt sich, dass auch das Quadrat des Linienelements der W-Fläche selbst die Form enthält:

$$\frac{du^2}{h^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'(h)^2},$$

wo nun $\frac{1}{R_1} = \vartheta(h)$, $\frac{1}{R_2} = \vartheta(h) - h\vartheta'(h)$.

162a) Vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 357.

163) Vgl. „*Bianchi*", p. 251. 164) „*Darboux*" 3, p. 372.

165) Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 1. Teil 2 (1868), p. 51.

Aus der letzteren Form des Linienelements kann man aber auf eine W-Fläche nur dann schliessen, wenn zugleich das Krümmungsmass der Fläche den Wert $\vartheta(h)(\vartheta(h) - h\vartheta'(h))$ besitzt.

18. Weitere Sätze. Die W-Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien betrachtet *Dini*[165]) p. 70. Er zeigt, dass die Flächen mit der Eigenschaft $R_1 R_2 = \text{const.}$ oder $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.}\ (\gtrless 0)$, nur wenn sie Rotationsflächen sind, lauter ebene Krümmungslinien besitzen können. Die W-Flächen mit nur einer Schar ebener Krümmungslinien behandelt *Dini* in einer weiteren Arbeit[166]), doch ist das Ergebnis nicht einfach. *S. Lie*[167]) und später *Weingarten*[168]) zeigten auf verschiedenen Wegen, dass sich die Krümmungslinien der W-Flächen durch Quadraturen bestimmen lassen.

Beltrami[169]) und *Dini*[170]) fanden, dass die einzigen geradlinigen W-Flächen die geradlinigen Schraubenflächen sind[171]). Über parallele W-Flächen handelt eine Arbeit von *H. Thompson*, Americ. J. of Math. 24 (1902), p. 303. *L. Raffy* zeigte, dass die Schraubenflächen die einzigen W-Flächen sind, auf denen jede Kurve $R_1 = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien einen konstanten Winkel bildet (Par. soc. math. Bull. 25 (1897), p. 124).

Hinsichtlich der hyperoskulierten Normalschnitte (III D 1, 2 Nr. 38), die durch einen Punkt einer W-Fläche gelegt werden können, gilt der Satz, dass es drei derartige Schnitte, oder nur einen solchen gibt, je nachdem $\frac{dR_2}{dR_1}$ negativ oder positiv ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass im ersten Fall die Schnitte gegen einander gleich geneigt sind, besteht in der Unveränderlichkeit des Ausdrucks $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (III D 1, 2, Nr. 35), d. h. nur die Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung (Nr. 36) besitzen die fragliche Eigenschaft[172]).

VI. Minimalflächen.

19. Historisches. Sätze von Meusnier. Integral von Monge. Ausführliche Darstellungen der geschichtlichen Entwicklung der Lehre

166) Pisa, Ann. 11 (1869) Teil 2, p. 42.

167) Archiv math. og naturv. 4 (1879), pag. 507; Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 301.

168) J. f. Math. 103 (1888), p. 184.

169) Ann. di mat. 7 (1865), p. 148. 170) ibid. p. 208.

171) „*Darboux*“ 3, p. 314.

172) *R. v. Lilienthal*, J. f. Math. 104 (1889), p. 343. Der letzte Satz bei *A. Ribaucour*, Paris, Bull. Soc. Philomat. 7 (1879), p. 112.

von den Minimalflächen gaben *E. Beltrami*[173]), *B. Riemann-K. Hattendorff*[174]), *H. A. Schwarz*[174a]), *G. Darboux*[175]). Die Lehre von den Minimalflächen (vgl. auch III D 6a, Nr. **27**) beginnt mit der *J. L. Lagrange*'schen[176]) Aufstellung der Differentialgleichung der Fläche, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Flächeninhalt besitzt. Betrachtet man z als eine Funktion von x und y, so findet *Lagrange* zwischen den ersten Ableitungen p, q und den zweiten r, s, t von z die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0$$

oder:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche bedeuten, der Ausdruck $-Ydx+Xdy$ das Differential einer Funktion (etwa r) von x und y ist. Dies besagt aber, dass die mit den Richtungskosinus Y, $-X$, Z durch die Punkte der xy-Ebene gelegten Geraden ein Normalensystem bilden, und r kann als die auf den Strahlen des Systems zu messende Entfernung der Punkte einer das Normalensystem senkrecht durchsetzenden Fläche von den Punkten der xy-Ebene betrachtet werden.

Ch. Meusnier[177]) zeigte, dass diese Differentialgleichung das Verschwinden der Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche nach sich zieht. Obgleich nun eine Fläche mit der Eigenschaft $R_1+R_2=0$ keineswegs in ihrer ganzen Ausdehnung auch jene Minimaleigenschaft besitzen muss, hat man doch für diese Flächen — um die es sich im folgenden handelt — den Namen *Minimalflächen* beibehalten. Der von *A. Ribaucour* (Nr. **30**) benutzte Name *Elassoid*

---

173) Bologna, Mem. (2) 7 (1868), p. 3.

174) Posthume Abhandlung von *B. Riemann,* bearbeitet von *K. Hattendorff,* Göttinger Abhandlungen 13 (1867).

174a) J. f. Math. 80 (1875), p. 280; Gesammelte math. Abhndlgn. 1, Berlin 1890, p. 168.

175) „*Darboux*" 1, livre III.

176) Miscellanea Taurinensia 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 335. Über diese Frage der Variationsrechnung (II A 8) vgl. *B. Riemann,* Gesammelte math. Werke hrsg. von *H. Weber,* Leipzig 1876, p. 287; *H. A. Schwarz,* Gesammelte math. Abhndlgn. 1, Berlin 1890, p. 223, 270; *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 231. Für die Anwendung der *O. Bonnet*'schen Methode vgl. *H. Résal* das unter 132a) zitierte Werk p. 123; für die Anwendung der *Grassmann*'schen Methode vgl. *H. Grassmann,* Inaug. Dissert. Halle a/S. 1893, p. 84.

177) Paris, Mém. sav. [étr.] 10 (1785) (lu 1776), p. 504.

ist nicht gebräuchlich geworden. *Meusnier* fand, dass jede geradlinige Minimalfläche mit einer Leitebene eine gewöhnliche Schraubenfläche, und jede Rotations-Minimalfläche die Umdrehungsfläche der Kettenlinie (*Catenoid*)[178]) ist (l. c. p. 507, 508). *G. Monge*[179]) und *A. Legendre*[180]) stellten, der erste unter Benutzung seiner Theorie der Charakteristiken (II A 5, Nr. **43**), der zweite unter Anwendung der nach ihm benannten Transformation (ib.) als allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung die Ausdrücke auf[181]):

$$x = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}, \quad y = \varphi(\alpha) - \alpha\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \psi(\beta) - \beta\frac{d\psi(\beta)}{d\beta},$$

$$z = \int \sqrt{-1-\alpha^2}\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\,d\alpha + \int \sqrt{-1-\beta^2}\,\frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2}\,d\beta.$$

Hier bedeuten α und β zwei Parameter, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ willkührliche Funktionen.

Da der Ausdruck für z, falls α und β reelle Veränderliche bedeuten, rein imaginär wird, so musste der geometrische Wert der *Monge*'schen Integration dunkel bleiben, bis die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen genügend ausgebildet war. Es würde hier zu weit führen, auf die Versuche einzugehen, die namentlich von *H. F. Scherk*[182]), *E. Björling*[183]), *E. Catalan*[184]), *O. Bonnet*[185]) unternommen wurden, um die im *Monge*'schen Integral auftretende Schwierigkeit zu überwinden. Wir erwähnen nur die bei dieser Gelegenheit gefundenen Minimalflächen selbst.

20. Die von Scherk, Catalan, Enneper gefundenen Minimalflächen. *Scherk* zeigte, dass die Gleichung:

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

eine Minimalfläche darstellt und fand ausserdem die Gleichung der

178) *M. Schilling,* Halle a/S., Modelle von *G. Herting,* Nr. 220—223. Über die Kettenlinie vgl. *G. Loria,* Spezielle algebr. u. transscend. ebene Kurven, deutsch von *F. Schütte,* Leipzig. 1902, p. 574 (III D 4, Nr. **27**).

179) Applic. § 20.

180) Paris, Mém. sav. [étr.] (1789) (lu 1787), p. 309; ibid., p. 314 Ausdrücke für x, y, z ohne Quadraturen.

181) Vgl. *Serret-Harnack,* Lehrb. der Diff.- u. Integr.-Rechnung 2, zweite Hälfte (1885), p. 321; *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 7 (1862), p. 15.

182) Lipsia, Societatis Jablonovianae nova Acta 4 Fasc. 2 (1831); J. f. Math. 13 (1835), p. 185.

183) Archiv Math. Phys. 4 (1843), p. 301.

184) J. éc. polyt. 21 (1858), p. 129.

185) Par., C. R. 37 (1853), p. 531; 40 (1855), p. 1108 und ausführlich J. de math. (2) 5 (1860), p. 222.

Minimalflächen, die zugleich Schraubenflächen[185a]) sind. Auf die erstere Fläche kam *A. Enneper*[186]) bei der Beantwortung der Frage nach solchen Minimalflächen, die eine Schar ebener Meridiankurven (III D 3, Nr. **41**) besitzen, und auf die Schraubenflächen bei der Frage nach Minimalflächen, die eine Schar geodätischer Meridiankurven besitzen[187]) *Catalan*[188]) fand die Minimalfläche, deren Gleichung sich durch Elimination von ϑ aus den Beziehungen ergibt:

$$(x - \vartheta)\cos\vartheta = (y - 1)\sin\vartheta,$$
$$z^2\cos\vartheta + 4y(1 - \cos\vartheta) - 4(1 - \cos\vartheta)^2 = 0.$$

Dieselben stellen für jeden bestimmten Wert von ϑ eine Parabel dar, deren Ebene auf der xy-Ebene senkrecht ist, und deren Scheitel bei sich änderndem ϑ die Cykloide (III D 4, Nr. **6**) mit den Gleichungen $x = \vartheta - \sin\vartheta$, $y = 1 - \cos\vartheta$ durchläuft. Ist C der Mittelpunkt des Rollkreises, und CP der zum zugehörigen Cykloidenpunkt führende Halbmesser, so werden die Radien CP von einer neuen Cykloide eingehüllt, die den Radius CP im Punkte mit den Koordinaten $x = \frac{1}{2}(2\vartheta - \sin 2\vartheta)$, $y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta)$ berührt. Durch diesen Punkt geht die Direktrix der zu ϑ gehörenden Parabel. Die Fläche ist enthalten unter den von *Enneper*[189]) bestimmten Minimalflächen, die eine Schar von Parabeln und eine Schar ebener Meridiankurven besitzen. Diese Flächen entstehen durch geometrische Zusammensetzung (vgl. Nr. **31**) der *Catalan*'schen Fläche und der Schraubenfläche, wobei die Punkte der Parabeln und die der Erzeugenden der Schraubenfläche einander zugeordnet sind.

21. Analytische Darstellungen der Minimalflächen von Weingarten, Enneper, Weierstrass, Riemann, Peterson, Beltrami. Die *Weingarten*'sche Darstellung der Minimalflächen[189a]) wurde bereits in Nr. **17** erwähnt. Die für Minimalflächen geltende Bedingung $\vartheta(k) = \frac{k^2}{2}$ ergibt für das Quadrat des Linienelementes des sphärischen Bildes dieser Flächen die Form $\frac{dp^2 + dq^2}{k^2}$. Jeder konformen

185a) Vgl. *M. Falchi,* Giorn. di mat. 34 (1896), pag. 89.

186) Gött. Abh. 29 (1882), p. 41. Ausführlich wird die *Scherk*'sche Minimalfläche behandelt von *G. Scheffers* in dem im Zitat 176) genannten Werke p. 252. Vgl. *R. Kummer,* Inaug. Dissert. Leipzig 1894.

187) Gött. Abh. 29 (1882), p. 68.

188) Zitat 184), p. 160 und Paris, C. R. 41 (1855), p. 1019. Modell von *Laine,* bei *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 225.

189) Gött. Abh. 29 (1882), p. 49. Modell von *Tallqvist,* bei *M. Schilling,* Halle a/S., Nr. 226.

189a) J. f. Math. 62 (1863), p. 164; vgl. *E. Beltrami,* die unter 200) zitierte Arbeit, p. 59.

Abbildung der Kugel auf die Ebene (III D 6 a, Nrr. **11, 33**) entspricht somit eine durch die *Weingarten*'schen Formeln darstellbare Minimalfläche.

A. Enneper[190]) geht von den drei Fundamentalgleichungen aus, wie sie unter der Annahme gelten, dass die Parameterlinien mit den Krümmungslinien zusammenfallen (III D 3, Nr. **9**), und findet für die Koordinaten der Punkte der Minimalflächen die Gleichungen:

$$x = \int \frac{\varphi^2(p) - 1}{4\varphi'(p)} dp + \int \frac{\psi^2(q) - 1}{4\psi'(q)} dq,$$

$$y = i \int \frac{\varphi^2(p) + 1}{4\varphi'(p)} dp - i \int \frac{\psi^2(q) + 1}{4\psi'(q)} dq,$$

$$z = \int \frac{\varphi(p)}{2\varphi'(p)} dp + \int \frac{\psi(q)}{2\psi'(q)} dq.$$

Hier sind p und q konjugiert komplexe Veränderliche, während $\varphi(p)$ und $\psi(q)$ in den Formen $\Phi(p) + i\Psi(p)$, $\Phi(q) - i\Psi(q)$ angenommen werden, wo Φ und Ψ für reelle Werte von p reell sein sollen. Die Krümmungslinien fallen mit den Kurven $p + q = \text{const.}$ und $p - q = \text{const.}$ zusammen. Einfache Voraussetzungen hinsichtlich der Funktion $\varphi(p)$ führen *Enneper* einerseits zu einer algebraischen Minimalfläche neunter Ordnung[191]), andererseits zum Nachweis, dass die von *Scherk* gefundenen Schraubenflächen zugleich die allgemeinsten Schraubenflächen mit der Eigenschaft $R_1 + R_2 = 0$ sind[192]).

K. Weierstrass[193]) fasst auf einer Minimalfläche ein beliebiges isothermes Kurvensystem (III D 3, Nr. **19**) ins Auge, dessen Parameter mit p und q bezeichnet werden. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = 0,$$

und so folgt der Satz, dass x, y, z die reellen Teile dreier analytischer Funktionen f, g, h der komplexen Veränderlichen $u = p + qi$ sind, wobei die Funktionen f, g, h der Bedingung unterliegen:

$$\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 + \left(\frac{dh}{du}\right)^2 = 0.$$ [194])

Diese Gleichung löst *Weierstrass*, unter G und H zwei willkürliche Funktionen verstehend, in folgender Weise auf:

$$\frac{df}{du} = G^2 - H^2, \quad \frac{dg}{du} = i(G^2 + H^2), \quad \frac{dh}{du} = 2GH.$$

190) Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 107.

191) Zitat 190), p. 108. *M. Schilling*, Halle a/S., Modell von *G. Herting*, Nr. 224.

192) Zitat 190), p. 110. Vgl. „*Darboux*" 1, p. 276; „*Bianchi*", p. 273; *E. Lamarle*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 241.

193) Berlin. Monatsberichte 1866, p. 612. Vgl. auch III D 6 a, Nr. **21**.

194) Vgl. *Lacroix*, Traité du calcul diff. et int. 2, Paris 1814, 2. Aufl., p. 627; „*Darboux*" 1, p. 274.

Das betrachtete Kurvensystem vermittelt die konforme Abbildung (II B 1, Nrr. 5, 18) eines gehörig begrenzten Stückes der Minimalfläche auf ein Stück (E) der p, q-Ebene. Bezeichnen wir mit p_0, q_0 die Koordinaten eines beliebig innerhalb des letzteren gewählten Punktes, mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Minimalfläche und setzen $u_0 = p_0 + q_0 i$, so entsteht:

$$x = x_0 + \Re \int_{u_0}^{u} (G^2(u) - H^2(u))\, du,$$

$$y = y_0 + \Re \int_{u_0}^{u} i\,(G^2(u) + H^2(u))\, du, \quad z = z_0 + \Re \int_{u_0}^{u} 2\, G(u)\, H(u)\, du.$$

Das Zeichen $\Re$ bedeutet, dass der reelle Teil des jeweiligen Integrals in Rechnung gesetzt werden soll. Die Grösse $\frac{H(u)}{G(u)} = s$ besitzt folgende geometrische Bedeutung. Werden die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche mit X, Y, Z bezeichnet, so projiziere man den dem Punkt (x, y, z) der Minimalfläche entsprechenden Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel vom Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ derselben aus auf die Ebene $z = 0$. Wird dadurch der Punkt $x = x'$, $y = y'$ erhalten, so ist $s = x' + y' i$. Führt man an Stelle der unabhängigen Veränderlichen u die Veränderliche s ein und setzt: $G^2(u)\, du = \mathfrak{F}(s)\, ds$, so ergibt sich[195]):

$$x = \Re \int (1 - s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds, \quad y = \Re \int i\,(1 + s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

$$z = 2\,\Re \int s\, \mathfrak{F}(s)\, ds.$$

Um x, y, z ohne Verwendung von Integralzeichen darzustellen, bezeichnet *Weierstrass* mit $F(s)$ eine Funktion, deren dritte Ableitung $\mathfrak{F}(s)$ ist und erhält:

$$x = \Re\{(1 - s^2)\, F''(s) + 2s\, F'(s) - 2F(s)\},$$
$$y = \Re\{i\,(1 + s^2)\, F''(s) - 2is\, F'(s) + 2i\, F(s)\},$$
$$z = \Re\{2s\, F''(s) - 2F'(s)\}.$$

Hiermit ist gezeigt, dass zu jeder analytischen Funktion eine Minimalfläche gehört und umgekehrt. Ferner bewies *Weierstrass* den umkehrbaren Satz, dass zu jeder algebraischen Funktion $F(s)$ auch eine algebraische Minimalfläche gehört. Die zweiten *Weierstrass*'schen Ausdrücke gehen aus den *Enneper*'schen hervor, wenn $p = \int \sqrt{2\,\mathfrak{F}(s)}\, ds$ genommen, und die Umkehrungsfunktion dieses Integrals mit $\varphi(p)$ be-

195) Vgl. die Arbeiten von *L. Kiepert*, J. f. Math. 81 (1876), p. 337 und 85 (1878), p. 171; *J. Weingarten*, Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 43.

zeichnet wird. Daher erhält man bei der *Weierstrass*'schen Darstellung die Gleichungen der Krümmungslinien, wenn man den reellen und den imaginären Bestandteil des Integrals $\int \sqrt{2\mathfrak{F}(s)}\, ds$ je einer Konstanten gleich setzt[196]).

Dass überhaupt die Krümmungslinien und ebenso die Haupttangentenkurven einer Minimalfläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen, zeigte zuerst *M. Roberts*[197]) und dann *O. Bonnet*[198]). — Auch die Darstellung der Minimalflächen in Ebenenkoordinaten[198a]) ist von *Weierstrass* in der genannten Arbeit ausgeführt. Eine eingehende Behandlung der Theorie der Minimalflächen in diesen Koordinaten findet man bei „*Darboux*" 1, p. 296 ff. Daselbst (p. 303) sind auch die Veränderungen untersucht, welche die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ und die entsprechende bei Anwendung von Ebenenkoordinaten auftretende Funktion erleidet, falls man die Minimalfläche aus einer Lage irgendwie in eine neue Lage bringt[198b]).

Neben der *Weierstrass*'schen Darstellung der Koordinaten einer Minimalfläche erwähnen wir die *B. Riemann*'sche[199]) (1860/61).

Hier wird um den Koordinatenanfangspunkt eine Kugel mit dem Halbmesser Eins beschrieben, und die sphärischen Bilder (III D 3, Nr. 7) der Punkte der Minimalfläche werden vom Punkte ($x=-1$, $y=0$, $z=0$) aus auf die im Punkte ($x=1$, $y=0$, $z=0$) berührende Tangentialebene der Kugel projiziert. In dieser Ebene legt *B. Riemann* durch ihren Berührungspunkt mit der Kugel die y'- und z'-Achse bezw. parallel der y- und z-Achse und ordnet jenem Projektionspunkte die komplexe Zahl $\eta = y' + z'i$ zu. Wird in der Gleichung der Minimalfläche x als eine Funktion von y und z betrachtet, so ist nach dem Obigen die Differentialform $-Zdy + Ydz$ gleich dem Differential einer Funktion von y und z, die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet wird. Es zeigt sich, dass die Funktion $x + i\mathfrak{x} = 2U$ nur von η abhängt, und weiter, dass die Funktion

$$u = \int \sqrt{i \frac{dU}{d \log \eta}}\, d \log \eta$$

durch eine Drehung des x-y-z-Systems um seinen Anfangspunkt nicht beeinflusst wird. Mit Hilfe dieser Funktion u drückt *Riemann* die Koordinaten der Punkte der Minimalfläche durch die Gleichungen aus:

196) Vgl. „*Bianchi*", p. 358; „*Darboux*" 1, p. 312.
197) J. de math. (1) 11 (1846), p. 300.
198) ibid. (2) 5 (1860), p. 228.
198a) Vgl. *J. Franz*, Arch. Math. Phys. 55 (1873), p. 111.
198b) Vgl. die unter [200]) zitierte Arbeit von *E. Beltrami*, p. 63.
199) Die unter [176]) zitierten gesammelten Werke p. 292.

$$x = 2\,\Re\int -i\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta,\quad y = \Re\int -i\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)d\log\eta,$$

$$z = \Re\int -\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)d\log\eta.$$

Nach einer Spiegelung der Fläche an der Ebene $x = 0$ stimmen die *Riemann*'schen Formeln mit den zweiten *Weierstrass*'schen bis auf die Bezeichnung der Achsen überein, wenn $\eta = s$, $\mathfrak{F}(s) = i\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2$ gesetzt wird. Ist u' die komplex konjugierte von u, so werden hier die Krümmungslinien durch die Gleichung $u \pm i u' = \text{const.}$, die Haupttangentenlinien durch die Gleichung $u \pm u' = \text{const.}$ bestimmt. Das in dem Ausdruck für x auftretende Integral ist gleich U; ebenso mögen die in den Ausdrücken für y und z auftretenden Integrale mit V und W bezeichnet werden. *Riemann* zeigt, dass durch die Gleichungen für x, y und z die Minimalfläche auf jede der die komplexen Grössen U, V, W geometrisch darstellenden Ebenen konform abgebildet wird, und, dass der Inhalt eines Minimalflächenstücks gleich ist der halben Summe der Inhalte seiner Bilder in diesen Ebenen[199a]).

K. Peterson[199b]) findet im Verlauf von Untersuchungen über die Biegung der Flächen für die Koordinaten einer Minimalfläche eine Darstellung, die einen willkürlichen Parameter α enthält, nämlich:

$$x = \Re\left(ie^{\alpha i}\int f(l)\cos l\,dl\right),\quad y = \Re\left(ie^{\alpha i}\int f(l)\sin l\,dl\right),\quad z = \Re\left(e^{\alpha i}\int f(l)\,dl\right),$$

wo $f(l)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen l ist. Die den einzelnen Werten von α entsprechenden Minimalflächen bilden eine Schar assoziierter Minimalflächen (Nr. **23**). Die *Peterson*'sche Darstellung geht in die zweite *Weierstrass*'sche über vermöge der Substitution:

$$\alpha = 0,\quad e^{li} = is,\quad f(s) = 2is^2\mathfrak{F}(s).$$

E. Beltrami[200]) geht aus von dem Umstand, dass für die zweiten Differentialparameter (III D 3, Nr. 8, p. 124) der Koordinaten einer beliebigen Fläche die Gleichungen gelten:

199a) Bei *Riemann,* [176]) p. 291 steht irrtümlich „doppelte" Summe statt „halbe"; richtig bei *H. A. Schwarz* in den unter [174a]) zitierten ges. Abhandlg. p. 177, 178, wo auch der *Riemann*'sche Ausdruck für den Inhalt eines Minimalflächenstücks eine geometrische Veranschaulichung findet.

199b) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 67. Herrn *P. Stäckel* verdankt der Verfasser die Mitteilung, dass sich die obigen Formeln schon in einer russisch geschriebenen Arbeit *Peterson*'s aus dem Jahre 1866 befinden. Vgl. die Mitteilungen über *Peterson* von *P. Stäckel*, Biblioth. Mathem. (3) 2 (1901), p. 128.

200) Bologna, Mem. (2) 7 (1868), p. 3.

$$\Delta_2(x) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) X, \qquad \Delta_2(y) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Y,$$
$$\Delta_2(z) = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Z.$$

Hieraus folgt, dass eine Minimalfläche von jeder Schar paralleler Ebenen in isothermen Linien geschnitten wird. Sind u und v die Parameter zweier zu einander senkrechter Isothermenscharen auf einer Minimalfläche, und setzt man $u + vi = w$, so folgt wie vorhin, dass x, y, z die reellen Teile dreier Funktionen φ, ψ, χ von w sind, die der Beziehung:

$$\varphi'(w)^2 + \psi'(w)^2 + \chi'(w)^2 = 0$$

genügen. Diese Gleichung wird nun in ähnlicher Weise befriedigt, wie *Lagrange* die Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ohne Integralzeichen löste (III D 1, 2, Nr. **13**; vgl. die Entwicklungen und historischen Angaben bei *P. Stäckel*, Leipz. Ber. 1902, p. 101). So erhält *Beltrami*, unter f eine willkürliche Funktion verstehend:

$$\varphi(w) = \frac{df}{dw}\sin w + \frac{d^2f}{dw^2}\cos w, \quad \psi(w) = \frac{df}{dw}\cos w - \frac{d^2f}{dw^2}\sin w,$$
$$\chi(w) = if(w) + i\frac{d^2f}{dw^2}.$$

Für die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche ergeben sich die Gleichungen:

$$X = \frac{\sin u}{\cos \text{hyp. } v}, \quad Y = \frac{\cos u}{\cos \text{hyp. } v}, \quad Z = \text{tg hyp. } v.$$

Die Kurven $u = \text{const.}$ auf der Einheitskugel sind somit die durch die z-Achse gehenden Meridiane, die Kurven $v = \text{const.}$ die zugehörigen Parallelkreise. Der Übergang von den dritten *Weierstrass*schen Formeln zu den *Beltrami*'schen vollzieht sich mit Hülfe der Substitutionen:

$$s = ie^{-iw}, \quad F(s) = \frac{e^{-iw}f(w)}{2}$$ [201].

22. Bestimmung einer Minimalfläche bei gegebener Begrenzung. (Vgl. Nr. **24**). Von Bedeutung ist die Aufgabe, eine Minimalfläche durch eine vorgeschriebene Begrenzung zu legen. Obgleich *J. A. Serret* [202]) und *O. Bonnet* [203]) sich schon mit der Aufgabe beschäftigt hatten, Minimalflächen zu bestimmen, auf denen gegebene Gerade liegen, wurde die Aufgabe bei vollständiger geradliniger Begrenzung

201) Über die *Weierstrass*'sche und *Beltrami*'sche Darstellung der Minimalflächen vgl. *S. Pincherle*, Giorn. di mat. 14 (1876), p. 75.

202) Paris, C. R. 40 (1855), p. 1078.

203) J. de Math. (2) 5 (1860), p. 245.

der Fläche erst von *Riemann*[176]) und *Weierstrass*[204]) auf das analytische Problem der konformen Abbildung eines ebenen Flächenstückes auf ein zweites zurückgeführt (II B 1, Nr. **18**).

Bereits *Bonnet*[203]) fand, dass in den nach ihm benannten Veränderlichen (III D 3, Nr. 7, p. 121) das Quadrat des Linienelements einer Minimalfläche die Gestalt besitzt:

$$ds^2 = (v^2 + w^2)(dx^2 + dy^2),$$

während das entsprechende Linienelement der Einheitskugel durch die Gleichung:

$$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\cos^2 iy}$$

gegeben ist. Daraus folgt 1) dass die Meridiane und Parallelen (III D 3, Nr. **41**) auf den Minimalflächen nicht nur, wie schon *Minding*[205]) zeigte, ein orthogonales, sondern auch ein isothermes System bilden; 2) dass die Minimalflächen durch die *Gauss*'sche Abbildungsart (III D 6a, Nrr. **11**, **33**) konform auf die Einheitskugel abgebildet werden. Die letztere Eigenschaft kommt, wie *E. B. Christoffel*[206]) nachwies, wenn man von dem trivialen Fall der Kugel absieht, ausschliesslich den Minimalflächen zu. Ferner stellte *Bonnet*[207]) den Satz auf, dass auch die Krümmungslinien einer Minimalfläche isotherm sind, woraus sich dann ergibt, dass die Haupttangentenkurven ebenfalls isotherm sind, da sie, wie *Ch. Dupin*[208]) zeigte, den Winkel der Krümmungslinien halbieren[209]). Denkt man sich nun ein reguläres Stück einer Minimalfläche zuerst durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abgebildet und das hier gewonnene Stück durch stereographische Projektion auf die s-Ebene abgebildet, so möge der Ebenenteil T_1 erhalten werden. Wird dasselbe Stück der Fläche konform auf die p-Ebene abgebildet, so möge der Ebenenteil T_2 erhalten werden. Eine *Weierstrass*'sche Funktion $\mathfrak{F}(s)$ vermittelt die konforme Abbildung von T_2 auf T_1. Ist umgekehrt die Gestalt von T_2 und T_1, sowie die konforme Abbildung von T_2 auf T_1 bekannt, so ergibt sich $\mathfrak{F}(s)$, und damit sind die Koordinaten der Minimalfläche durch Quadraturen zu erhalten. Die Art der Begrenzung von T_1 und T_2 ist bekannt in dem von *Riemann* und *Weierstrass* betrachteten Falle der geradlinigen Begrenzung des Minimalflächenstücks.

204) Berlin, Monatsberichte (1866), p. 855.

205) J. f. Math. 44 (1852), p. 71.

206) J. f. Math. 67 (1867), p. 218; „*Darboux*" **1**, p. 309.

207) Paris, C. R. 37 (1853), p. 529.

208) Développements, p. 187 (III D 3, Nr. **3**).

209) Vgl. die Beweisführung bei *H. A. Schwarz*, Abhandl. **1**, p. 172 u. *U. Dini*, Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 185.

Eine auf einer Fläche gelegene Gerade ist stets eine Haupttangentenkurve derselben, ihr sphärisches Bild der Bogen eines grössten Kreises, dessen Ebene senkrecht zur Geraden ist. Das durch stereographische Projektion (III D 6a, Nr. 4) erhaltene Bild eines Kugelkreises in der s-Ebene ist geradlinig oder kreisförmig. Ebenso ist das Bild einer auf der Minimalfläche liegenden Geraden in der p-Ebene wieder eine Gerade, die unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$ gegen die reelle Achse geneigt ist. Man steht also vor der Aufgabe, ein von Kreisbögen begrenztes Vieleck auf ein geradliniges Vieleck konform so abzubilden, dass die Begrenzungen sich entsprechen. Der Fall, in dem die Begrenzung der Minimalfläche aus vier paarweise einander gegenüberliegenden Kanten eines regelmässigen Tetraeders gebildet wird, ist ausführlich von *H. A. Schwarz*[210]) und *A. Schorndorf*[211]) behandelt. *Schwarz* verallgemeinerte die Art der Begrenzung der Minimalfläche zur sogenannten „*Schwarz*'schen Kette", indem er neben geradlinigen Stücken Ebenen hinzunahm, gegen welche die Minimalfläche senkrecht geneigt sein soll[212]). Das in einer solchen Ebene liegende Begrenzungsstück ist dann eine geodätische Krümmungslinie der Minimalfläche, besitzt also als sphärisches Bild den Bogen eines grössten Kreises. Den besonderen Fall zweier von einem Punkt ausgehender Strecken und einer Ebene als *Schwarz'sche Kette* behandelte *E. K. Neovius*[213]). Die Annahme, dass die Minimalfläche gegen die auftretenden Ebenen nicht senkrecht, aber konstant geneigt sei, untersuchte *G. Tenius*[214]).

23. Die einer Minimalfläche assoziierten Minimalflächen. Bevor wir auf ein zweites Verfahren zur Lösung der in Rede stehenden Aufgabe übergehen, ist der Begriff der einer Minimalfläche *assoziierten* Minimalflächen zu erläutern. Ersetzt man in der zweiten *Weierstrass*schen Darstellung der Koordinaten einer Minimalfläche die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ durch $e^{i\alpha}\mathfrak{F}(s)$, wo α eine reelle Konstante bedeutet, so erhält

210) Abhandl. 1, p. 6; Preisschrift Akad. Berlin 1867.

211) Preisschrift philos. Fak. Göttingen 1868. Man vgl. die Darstellung bei „*Bianchi*", p. 382 und „*Darboux*", p. 424. Dazu *A. Schönflies*, Paris, C. R. 112 (1891), p. 478 u. 515.

212) Abhandl. 1, p. 130. Einen weiteren besonderen Fall behandelt die Inaug.-Dissert. von *F. Bohnert*, Göttingen 1888.

213) Helsingfors Akadem. Abhandl. 1883. Eine Arbeit desselben Verfassers in den Helsingfors Soc. Sc. Fenn. Acta 1888, p. 1 erörtert Singularitäten, die im Innern und auf der Begrenzung eines geradlinig begrenzten Minimalflächenstücks auftreten können.

214) Marburg, Inaug.-Dissert. 1888.

man eine Minimalfläche, die der ursprünglichen *assoziiert* heisst[215]). Hier gelten die Sätze:

1) In entsprechenden, d. h. zu demselben Wert von s gehörenden Punkten der Minimalfläche und einer assoziierten Fläche sind die Normalen der Fläche parallel (III D 6 a, Nr. **12**).

2) Die Krümmungslinien der associierten Fläche bilden mit den Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, ihre geodätische Krümmung ist gleich der geodätischen Krümmung derjenigen Kurven auf der ursprünglichen Fläche, welche die Krümmungslinien unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ schneiden.

3) Entsprechende Linienelemente beider Flächen bilden mit einander den Winkel α.

4) Die Assoziierte ist eine Biegungsfläche der ursprünglichen Fläche (III D 6 a, Nr. **27**).

5) Die Punkte der Minimalfläche beschreiben während der Biegungen, die zu den assoziierten Flächen führen, eine aus lauter Ellipsen bestehende doppelt unendliche Kurvenschar. Nimmt man den Winkel α gleich $-\frac{\pi}{2}$, so nennt man die entsprechende assoziierte die *adjungierte* Fläche. Sie ist wohl der Form nach, aber nicht hinsichtlich ihrer Lage im Raume völlig bestimmt[216]). *Bonnet* wies zuerst auf die adjungierte Fläche hin unter Aufstellung des Satzes[217]), dass die Haupttangentenkurven der Adjungierten den Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche entsprechen. Hinsichtlich der Biegung, durch die eine Minimalfläche in ihre adjungierte übergeht, zeigte *Bianchi*[218]), dass jede geodätische Linie in der Weise gebogen wird, dass die erste bezw. zweite Krümmung (III D 1, 2, Nrr. **29, 30**) der gebogenen Kurve gleich ist der zweiten bezw. ersten Krümmung der ursprünglichen Kurve. Wir erwähnen noch die *Darboux*'schen Sätze[219]): Sind zwei Flächen in der Weise auf einander abwickelbar, dass entsprechende Linienelemente einen konstanten Winkel mit einander bilden, so sind sie assoziierte Minimalflächen (III D 6 a, Nr. **27**). Ist jener Winkel gleich einem Rechten, so hat man es mit einer Minimalfläche und ihrer adjungierten zu thun.

Die einer Minimalfläche assoziierten Flächen brauchen der Gestalt nach nicht von ihr verschieden zu sein. So sind z. B. die auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Minimalflächen dadurch gekennzeichnet,

215) *K. Peterson*, Über Kurven u. Flächen, Leipzig 1868, p. 67; *Schwarz*, Abhandl. 1, p. 175.

216) „*Darboux*" 1, p. 323. 217) Par., C. R. 1853, p. 532.

218) Giorn. di mat. 22 (1884), p. 374. 219) „*Darboux*" 1, p. 331.

dass die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ den Ausdruck $Cs^{\varkappa}$ besitzt (III D 6 a, Nr. 27). Aus diesem Umstande folgt[220]), dass, wenn $\varkappa$ von -2 verschieden, die assoziierten Flächen durch Drehung um eine Gerade aus der ursprünglichen hervorgehen. Zu den fraglichen Flächen gehört auch die von *Enneper*[221]) gefundene, bei der $\varkappa$ gleich Null ist.

24. Methode von Darboux. Das oben erwähnte zweite Verfahren zur Bestimmung eines Minimalflächenstückes, dessen Begrenzung in der Form einer *Schwarz*'schen Kette gegeben ist, hat *Darboux* angegeben[222]). Es beruht auf der Anwendung der ersten *Weierstrass*schen Darstellung (Nr. 21) der Minimalflächen, die in der Gestalt:

$$x = \Re\int i(G(t)^2 - H(t)^2)\,dt, \quad y = \Re\int (G(t)^2 + H(t)^2)\,dt,$$
$$z = \Re\int 2G(t)H(t)\,dt$$

benutzt wird. Ist:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p\frac{d\vartheta}{dt} + q\vartheta = 0$$

die Differentialgleichung, der $G(t)$ und $H(t)$ als partikuläre Integrale genügen, so wird durch jedes Paar von einander unabhängiger partikulärer Lösungen derselben eine Minimalfläche bestimmt, und die sämtlichen so erhaltenen Minimalflächen betrachtet *Darboux* als zur selben *Familie* gehörig. Die einer Minimalfläche assoziierten Flächen, also auch ihre adjungierte Fläche, gehören mit ihr in dieselbe Familie. Denkt man sich das fragliche Minimalflächenstück derart auf die t-Ebene abgebildet, dass den inneren Punkten des Stückes die Werte von t mit positivem imaginären Teil, den Punkten der Begrenzung die reellen t-Werte entsprechen, so gelingt die Bestimmung von p und q[223]) bis auf die Festlegung numerischer Konstanten mit Hülfe der Bemerkung, dass die Begrenzung der adjungierten Fläche ebenfalls aus einer *Schwarz*'schen Kette besteht, deren Ebenen den Strecken und deren Strecken den Ebenen der ersten Kette entsprechen. Die Funktionen p und q sind in der ganzen t-Ebene eindeutig, und reell für reelle Werte von t. Der Gesamtheit der letzteren entspricht auf jeder zur fraglichen Familie gehörenden Minimalfläche eine Begrenzungslinie, von der sich zeigen lässt[224]), dass sie aus ebenen Krümmungslinien, die aber nicht geodätisch zu sein brauchen, und aus Haupttangentenkurven besteht, die nicht geradlinig zu sein brauchen, nämlich auch auf einem beliebigen Zylinder gezogene Schrauben-

220) „*Bianchi*", p. 373, 374.
221) Gött. Abh. 29 (1882), p. 73.
222) „*Darboux*" 1, p. 456.
223) „*Darboux*" 1, p. 472.
224) ibid. p. 475.

linien sein können. Das sphärische Bild einer solchen Begrenzung besteht aus Bögen von kleinen Kreisen. Man hat daher zwei solche partikuläre Integrale aufzufinden, die eine Begrenzung liefern, welche 1) nur aus geodätischen Krümmungslinien und geradlinigen Haupttangentenkurven besteht und 2) mit der gegebenen *Schwarz*'schen Kette zusammenfällt. Ist umgekehrt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von obiger Form mit bestimmbarer Gruppe[224a]) (II A 4b, Nr. 18) gegeben, so kann man nach den mit ihr verträglichen Begrenzungen von Minimalflächenstücken fragen. *Darboux* hat von diesem Gesichtspunkte aus namentlich die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (I A 3, Nr. 55; II B 7) untersucht[225]).

Hinsichtlich der Bestimmung einer Minimalfläche mittels vorgeschriebener Begrenzung ist noch der von *Riemann*[226]) betrachtete Fall zu erwähnen, in dem die Begrenzung aus zwei parallelen Kreisen besteht. Hier gelangt *Riemann* durch die Annahme zum Ziel, dass die den Kreisen parallelen Ebenen die Minimalfläche ebenfalls in Kreisen schneiden. (Vgl. Nr. 26).

25. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen analytischen Streifen. Anstatt durch eine vorgeschriebene Begrenzung, lässt sich eine Minimalfläche, wie schon *Björling*[183]) und *Bonnet*[227]) erkannten, auch durch die Forderung bestimmen, dass sie eine gegebene Kurve enthalten und längs der Kurve vorgeschriebene Normalen besitzen soll. Dabei müssen die Koordinaten der Kurve und die Richtungskosinus der Normalen als analytische Funktionen einer Veränderlichen gegeben sein, sodass sie auch für komplexe Werte dieser Veränderlichen bestimmt sind. Man drückt daher die in Rede stehende Forderung auch so aus, dass man sagt, die Minimalfläche solle durch einen gegebenen *analytischen Streifen* hindurchgelegt werden[228]). Betrachten wir die Koordinaten der gegebenen Kurve (x_0, y_0, z_0) und die gegebenen Richtungskosinus der Normalen (X_0, Y_0, Z_0) als Funktionen von t, so erhält man für die Koordinaten x, y, z der verlangten Minimalfläche nach *Schwarz*[229]) die Gleichungen:

$$x = \Re\left\{x_0 + i\int(Z_0 dy_0 - Y_0 dz_0)\right\},\quad y = \Re\left\{y_0 + i\int(X_0 dz_0 - Z_0 dx_0)\right\},$$

$$z_0 = \Re\left\{z_0 + i\int(Y_0 dx_0 - X_0 dy_0)\right\},$$

wo in den rechtsstehenden Klammern der Veränderlichen t komplexe

224a) *C. Jordan,* Cours d'Analyse 3, zweite Aufl., Paris 1896, p. 193.
225) ibid. p. 478. 226) Werke, p. 311.
227) Paris, C. R. 40 (1855), p. 1107. 228) „*Bianchi*", p. 378.
229) Abhandl. 1, p. 179.

Werte beizulegen sind. *Schwarz* knüpft an diese Formeln die Folgerungen:

1) Jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade ist eine Symmetrieachse der Fläche.

2) Schneidet eine Ebene eine Minimalfläche überall senkrecht, so ist sie eine Symmetrieebene der Fläche[230]).

Nach dem Vorigen ist eine Minimalfläche durch die Forderung bestimmt, dass eine gegebene Kurve eine auf ihr liegende geodätische Linie oder eine Haupttangentenkurve sein soll. Im ersteren Fall ist längs der Kurve ihre Hauptnormale, im zweiten ihre Binormale zugleich Normale der Fläche. Mit der Berechnung der Minimalfläche, die eine gegebene ebene Linie als geodätische Linie besitzen soll, beschäftigt sich die Inaug.-Dissertation von *L. Henneberg*[231]), und zwar wird hier von dem oben erklärten Abbildungsverfahren Gebrauch gemacht. *Henneberg* untersucht die Minimalflächen, bei denen eine Ellipse oder Hyperbel als geodätische Linie auftritt, ebenso die betreffenden adjungierten Flächen. Die Minimalfläche, für welche eine Parabel eine geodätische Linie[232]) ist, fällt mit der oben erwähnten *Catalan*'schen Minimalfläche zusammen. Auch die Minimalflächen, für welche die Evolute eines Kegelschnittes eine geodätische Linie ist, sind von *Henneberg* a. a. O. berechnet. Man vergleiche zu der in Rede stehenden Frage die Preisarbeit von *A. Ribaucour*[233]), wo auch die Fälle, in denen eine Epi- oder Hypocykloide oder eine *Ribaucour*'sche Kurve als geodätische Linie einer Minimalfläche betrachtet wird, erörtert werden. Für die Lemniskate (III C 3) wurde unsere Aufgabe von *O. v. Lichtenfels*[234]), für die Cykloide von *O. Niewenglowski*[235]) behandelt. Auf Scharen von Minimalflächen, die durch elliptische Integrale darstellbar sind, und bei denen Kurven mit konstanter erster Krümmung als Haupttangentenkurven auftreten, hat *R. v. Lilienthal* aufmerksam gemacht[236]).

---

230) „*Bianchi*", p. 379. 231) Heidelberg 1875.

232) Vgl. *A. Herzog,* Bestimmung einiger spezieller Minimalflächen, Zürich, Naturf. Ges. Viert.-Schrift 1875.

233) Étude des élassoides, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1880), § 110, § 123. Unter einer *Ribaucour*'schen Kurve versteht man eine ebene Kurve, bei der die auf den Kurvennormalen gemessenen Entfernungen der Kurvenpunkte von den Punkten einer festen, in der Ebene der Kurve liegenden, Geraden in konstantem Verhältnis zu den entsprechenden Krümmungshalbmessern der Kurve stehen. Vgl. *G. Loria,* das unter 178) zitierte Werk, p. 521 (III D 4, Nr. **26**).

234) Wien, Berichte (1886), p. 41.

235) Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 391.

236) Inaug.-Dissertation Berlin 1882; J. f. Math. 93 (1882), p. 248.

26. Weitere besondere Minimalflächen. Von weiteren besonderen Arten von Minimalflächen führen wir an:

1) Die geradlinigen Minimalflächen. *E. Catalan* zeigte[237]), dass die einzigen derartigen Minimalflächen die gewöhnlichen Schraubenflächen sind. Wohl den einfachsten Beweis dieses Satzes gab *Schwarz*[238]). (Vgl. Nr. **40.**)

2) Unter den Flächen mit einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen ist nur das Catenoid (Nr. **19**) eine Minimalfläche[239]). Man erkennt leicht, dass, wenn eine Schar von Krümmungslinien einer Minimalfläche aus ebenen Kurven besteht, auch die andere aus solchen bestehen muss, sodass die sphärischen Bilder der Krümmungslinien von zwei Ebenenbüscheln aus der Einheitskugel ausgeschnitten werden, deren Achsen reziproke Polaren der Kugel sind (Nr. **14**). Für den Fall der allgemeinen Lage dieser Polaren wurden die fraglichen Minimalflächen von *Bonnet*[240]) bestimmt. Nimmt man aber zwei zu einander senkrechte Tangenten der Kugel zu den Achsen jener Ebenenbüschel, so ergibt sich die oben (Nr. **21**) erwähnte, von *Enneper* gefundene Fläche neunter Ordnung und sechster Klasse. Die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ ist hier einer reellen Konstanten gleich[241]). *Darboux* zeigte, dass die fragliche Fläche die Schar der Ebenen einhüllt, welche durch die Mittelpunkte der die Punkte einer Parabel mit den Punkten ihrer Fokalparabel (III C 4) verbindenden Strecken senkrecht zu den Strecken gelegt werden können[242]). *Ribaucour* fand, dass die *Enneper*'sche Fläche die erste negative Fusspunktskurve (III D 1, 2, Nr. 7) einer Parabel hinsichtlich ihres Brennpunkts als geodätische Linie besitzt[243]). Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien untersuchte *H. Dobriner*[244]).

3) Bei den Minimalflächen, die zugleich Schraubenflächen sind, hat man[244a]):

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{a e^{i\alpha}}{s^2},$$

---

237) J. de math. (1) 7 (1842), p. 203. Vgl. das unter [176]) zitierte Werk von *G. Scheffers*, p. 242.

238) Abhandl. 1, p. 181.

239) *Bonnet*, J. de math. (2) 5 (1860), p. 223.

240) Paris, C. R. 41 (1855), p. 1057 und ausführliche Herleitung J. de math. (2) 5 (1860), p. 238; „*Bianchi*", p. 371. Vgl. *A. Demoulin*, Bruxelles Mém. cour. 58 (1899).

241) *Schwarz*, Abhandl. 1, p. 184; „*Darboux*" 1, p. 369.

242) ibid. p. 318. 243) Étude sur les élassoides § 114.

244) Acta math. 10 (1887), p. 145.

244a) „*Bianchi*", p 374.

wo a und α reelle Konstanten bedeuten. Für die Minimalflächen, die zugleich Spiralflächen (Nr. 7) sind, ist[245]):

$$\mathfrak{F}(s) = (A + Bi)\, s^{-2+\alpha i}.$$

4) Cyklische und weitere Minimalflächen. Die Frage nach den Minimalflächen, auf denen eine Schar von Kreisen liegt, ist von *Enneper* gelöst worden[246]). Die Ebenen der Kreise können hier nur parallel sein. Längs jedes Kreises wird die Fläche von einem Kegel zweiten Grades berührt, und diese Kegel sind koncyklisch, d. h. sie werden von denselben beiden Scharen von Ebenen in Kreisen geschnitten. Die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ hat hier die Gestalt:

$$\frac{C}{s\sqrt{(s - \operatorname{cotg}\varepsilon)\, s\, (s + \operatorname{tg}\varepsilon)}},$$

wo C und ε reelle Konstante bedeuten[247]). — Die Minimalflächen, welche überhaupt von einer Schar koncyklischer Kegel zweiten Grades berührt werden, sind von *H. A. Schwarz* bestimmt worden[248]). Hier gilt zunächst der Satz: Jede Minimalfläche, die von einem Kegel zweiten Grades längs der Schnittlinie desselben mit einer durch seinen Mittelpunkt hindurchgehenden Kugel berührt wird, wird von einer einfach unendlichen Schar koncyklischer Kegel zweiten Grades eingehüllt; ferner der folgende: Wenn eine Minimalfläche einen Kegel oder Zylinder zweiten Grades längs eines Kreisschnitts berührt, so enthält sie auch eine Schar von Kreisen in parallelen Ebenen. *Schwarz* schloss an diese Untersuchungen eine solche über die transcendenten Minimalflächen, auf denen eine Schar algebraischer Kurven liegt[249]), und bestimmte die fraglichen Flächen für einen ausgedehnten Fall. Eine besondere von *Schwarz* bei dieser Gelegenheit gefundene Fläche, auf der eine Schar von Raumkurven vierter Ordnung liegt, ist genauer untersucht von *W. Thienemann* (Inaug.-Dissert. Giessen 1890). Weitere Fälle sind behandelt von *R. v. Lilienthal* (J. f. Math. 99 (1886), p. 188) und *E. Götting* (Inaug.-Dissert. Göttingen 1887). *M. Peche* (Inaug.-Dissert. Göttingen 1891) bestimmte die Minimalflächen, auf denen eine Schar von Parabeln liegt, und zeigte (Wissensch. Beilage Prog. Oberrealsch. Breslau 1903), dass auf einer Minimalfläche keine Schar von Hyperbeln

245) „*Darboux*“ 1, p. 307.

246) Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 403; Gött. Nachr. 1866, p. 243. Vgl. *X. Stouff*, Toulouse Ann. 6 (1892), p. 5; *G. Juga*, Math. Ann. 52 (1899), p. 167.

247) *Schwarz*, Abhandl. 1, p. 187.

248) ibid. p. 190. Vgl. *E. Blutel*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 203.

249) Abhandl. 1, p. 205; vgl. ibid. p. 330, 331.

liegen kann. Dasselbe gilt nach einer Notiz von *H. A. Schwarz* (Berlin. Ber. 22. Januar 1903) von einer Schar von Ellipsen.

5) *J. Weingarten* bestimmte die Minimalflächen, deren Gleichung sich in der Gestalt:

$$f(x) + \varphi(y) + \psi(z) = 0$$

darstellen lässt[250]), und zeigte, dass die *Schwarz*'schen Minimalflächen mit dieser Eigenschaft[251]) die sämtlichen derartigen Flächen umfassen.

27. Methode von Lie. Hinsichtlich des weiteren Ausbaues der allgemeinen Theorie der Minimalflächen sind zunächst zu erwähnen die Arbeiten von *S. Lie.* Unter Übertragung der für reelle geometrische Gebilde geltenden Benennungen auf rein analytische Gebilde werden die Gleichungen[252]):

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

auch dann als die Gleichungen einer *Kurve* betrachtet, wenn A, B, C komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind. Nimmt man:

$$A(t) = a_0(t) + ia_1(t), \quad B(t) = b_0(t) + ib_1(t), \quad C(t) = c_0(t) + ic_1(t),$$

wo die Funktionen $a_0 \ldots c_1$ für reelle Werte von t reell sein sollen, so sind

$$x = a_0(\tau) - ia_1(\tau), \quad y = b_0(\tau) - ib_1(\tau), \quad z = c_0(\tau) - ic_1(\tau)$$

die Gleichungen der der ersteren *konjugierten* Kurve. Eine Zuordnung der Punkte beider Kurven zu einander besteht in der Herstellung einer Beziehung zwischen t und τ, wodurch τ als eine Funktion der Veränderlichen t oder ihrer komplex konjugierten erscheint. Die Gleichungen:

$$x = A(t) + A_1(\tau), \quad y = B(t) + B_1(\tau), \quad z = C(t) + C_1(\tau)$$

bestimmen eine *Fläche*, und zwar eine *Translationsfläche* (Nr. 6). Von Wichtigkeit ist hier die Auffassung der Fläche als des Ortes der Mittelpunkte aller Sehnen, die je einen Punkt der durch:

$$x = 2A(t), \quad y = 2B(t), \quad z = 2C(t)$$

gegebenen Kurve mit je einem Punkt der durch:

$$x = 2A_1(\tau), \quad y = 2B_1(\tau), \quad z = 2C_1(\tau)$$

bestimmten Kurve verbinden. Wir belegen die fraglichen beiden Kurven mit dem Namen *Grundkurven* und erhalten eine Minimal-

250) Gött. Nachr. 1887, p. 28. 251) Abhandl. 1, p. 137.

252) Math. Ann. 14 (1878), p. 332; Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 170. Vgl. *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geom., autogr. Vorl. 1. Göttingen 1893, p. 369.

fläche, wenn die Grundkurven *Linien von der Länge Null*, oder, wie man auch sagt, *Minimallinien* oder *Linien mit isotropen Tangenten*[252a]) sind (III D 1, 2, Nr. **12**; III D 4, Nr. **35**), d. h. wenn die Funktionen $A(t), \ldots C_1(\tau)$ den Bedingungen genügen:

$$A'(t)^2 + B'(t)^2 + C'(t)^2 = 0, \quad A_1'(\tau)^2 + B_1'(\tau)^2 + C_1'(\tau)^2 = 0.$$

Dann sind auch die Parameterlinien $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ auf der Fläche Minimallinien, und umgekehrt kann nach Nr. **21** jede Minimalfläche als durch Translation einer Minimallinie entstanden angesehen werden. Die so bestimmte Minimalfläche besitzt eine doppelt unendliche Anzahl reeller Punkte, wenn eine der beiden Grundkurven durch eine reelle Parallelverschiebung in die konjugierte der anderen übergeht.

Die bei *S. Lie* auftretende Minimalfläche, bei der die beiden Grundkurven in eine zusammenfallen, ist eine *Doppelfläche*[253]) (III A 4), sodass hier:

$$x = A(t) + A(\tau), \quad y = B(t) + B(\tau), \quad z = C(t) + C(\tau).$$

Die Fläche besitzt jetzt nur eine Schar von Parameterlinien und ist der Ort der Mittelpunkte der Sehnen der einen vorhandenen Grundkurve, die nun selbst auf der Fläche liegt und von der Schar der Parameterlinen eingehüllt wird. Bezeichnen wir mit $A_0(t)$, $B_0(t)$, $C_0(t)$ die konjugierten Funktionen von $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, mit t' den zu t konjugierten Wert, so ist die Doppelfläche reell, wenn sich τ so als Funktion $-f(t')$ — von t' bestimmen lässt, dass:

$$A(f(t')) = A_0(t') + a, \quad B(f(t')) = B_0(t') + b, \quad C(f(t')) = C_0(t') + c,$$

wo a, b, c reelle Konstante bedeuten. Es gehört so zu jedem Wert von t ein reeller Punkt der Fläche. Zu dem Werte $t_1 = f(t')$ von t gehört ein zweiter Punkt der Fläche, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 seien. Dann hat man:

$$x_1 = x + 2a, \quad y_1 = y + 2b, \quad z_1 = z + 2c.$$

Legt man eine positive Richtung der Flächennormalen fest, so zeigt sich, dass in den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) diese positiven Richtungen parallel, aber entgegengesetzt sind.

252a) *P. Stäckel*, Leipz. Ber. 1902, p. 101.

253) Math. Ann. 14 (1878), p. 346. Die ibid. p. 347 angegebene Bedingung für die Reellität einer Doppelfläche ist ungenau. Von den auf der Fläche gelegenen Minimalkurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ lässt sich nur sagen, dass eine jede derselben in ihre konjugierte durch eine Parallelverschiebung übergeht, deren Komponenten reelle Teile besitzen, die in der ganzen Fläche konstant sind, während die rein imaginären Teile von dem die Einzelkurve bestimmenden Parameterwert abhängen. Vgl. die Darstellung bei „*Darboux*“ 1, p. 348; *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 258.

Bei der zweiten *Weierstrass*'schen Darstellung einer Minimalfläche (Nr. **21**) gilt allgemein der Satz, dass, wenn $\mathfrak{F}_1(s)$ die konjugierte Funktion von $\mathfrak{F}(s)$ bezeichnet, die beiden Funktionen $\mathfrak{F}(s)$ und $-\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right)$ stets dieselbe Minimalfläche liefern[254]). Hier besteht eine notwendige Bedingung für eine reelle Doppelfläche in der Gleichung:

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Betrachtet man eine Minimalfläche als umhüllt von der Ebenenschar mit der Gleichung:

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$

so besteht die entsprechende Bedingung in der Gleichung:

$$\frac{f(u)}{u} = -uf_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

wo f_1 die konjugierte Funktion von f bezeichnet[255]).

Sind die Grössen a, b, c nicht sämtlich gleich Null, so liegt eine *periodische* Doppelfläche vor. Als Beispiel einer solchen führen wir die gewöhnliche Schraubenfläche an (Nr. 5). Nimmt man hier für die Grundkurve, unter m eine reelle Konstante verstehend:

$$A(t) = \frac{-im\sin t}{2}, \quad B(t) = \frac{im\cos t}{2}, \quad C(t) = \frac{m\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{2},$$

und setzt $\tau = t' + \pi$, so wird:

$$A(\tau) = \frac{im\sin t'}{2}, \quad B(\tau) = \frac{-im\cos t'}{2}, \quad C(\tau) = \frac{m\left(t'-\frac{\pi}{2}\right)}{2} + m\frac{\pi}{2};$$

die Fläche geht also durch eine Verschiebung mit den Komponenten $a = 0$, $b = 0$, $c = m\pi$ in sich selbst über. Die Veränderliche t ist hier mit der *Weierstrass*'schen Veränderlichen s durch die Gleichung verbunden:

$$s = ie^{it},$$

und ausserdem hat man:

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{-im}{2s^2} = -\frac{1}{s^4}\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Sind die Grössen a, b, c sämtlich gleich Null, so hat man es mit einer *einseitigen* Fläche zu thun[255a]). Hier gehört zu den Werten t und t_1 ein und derselbe Punkt, und die zu t gehörende positive Normalenrichtung ist entgegengesetzt parallel der zu t_1 gehörenden.

---

254) „*Darboux*" 1, p. 295. 255) „*Darboux*" 1, p. 354.

255a) Über die Entdeckung der einseitigen Flächen siehe *P. Stäckel*, Math. Ann. 52 (1899), p. 598 (III A 4).

Als Beispiele von einseitigen Flächen führen wir an die von *Henneberg*[231]) berechneten Minimalflächen, bei denen die Evolute eines Kegelschnitts als ebene geodätische Linie auftritt. Der besonders interessante Fall, in dem die Evolute der Parabel zur geodätischen Linie genommen wird, ist ausführlich von *C. Schilling*[256]) untersucht. Die fragliche Fläche ist von der fünften Klasse und fünfzehnten Ordnung. Die Gleichungen ihrer Grundkurve lassen sich so schreiben:

$$x = \frac{(1-s^2)^3}{s^3}, \quad y = \frac{i(1+s^2)^3}{s^3}, \quad z = \frac{3(1+s^4)}{s^2},$$

und man hat:

$$\mathfrak{F}(s) = -3\left(\frac{1}{s^4} - 1\right);$$

die Substitution $s = -\frac{1}{\tau}$ zeigt, dass hier die Grundkurve mit ihrer konjugierten zusammenfällt. Den von *Darboux* aufgestellten Fall[257]):

$$\mathfrak{F}(s) = \left(\frac{1}{s} - s\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{s} + s\right)^{\beta}\frac{1}{s^2},$$

wo β ungerade, hat *J. Vivanti* untersucht[258]).

Auf Grund der Bemerkung, dass die einer Minimalfläche längs einer Minimallinie umschriebene abwickelbare Fläche ein Zylinder ist, dessen Erzeugende durch einen Punkt des unendlich fernen imaginären Kugelkreises gehen, gelingt *Lie* die Bestimmung der Klasse einer algebraischen Minimalfläche; im besonderen ist fünf die niedrigste Klassenzahl[259]). Komplizierter sind die ganz der Theorie der algebraischen Flächen angehörenden Untersuchungen *Lie*'s über die Ordnung einer algebraischen Minimalfläche[260]).

28. Die Goursat'sche Transformation der Minimalkurven (III D 6a, Nr. 12). Von den Transformationen, vermöge derer eine Minimalkurve wieder in eine Minimalkurve übergeht, führt die von *E. Goursat*[261]) betrachtete zu neuen Minimalflächen, die aus einer gegebenen mit bekannten Grundkurven ableitbar sind. Es handelt sich um eine imaginäre Rotation um eine reelle Achse. Nimmt man letztere zur z-Achse, und führt die Transformation den Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel in den Punkt (X_1, Y_1, Z_1) derselben über, so ist:

---

256) Götting. Inaug.-Dissert. 1882.

257) „*Darboux*" 1, p. 364.

258) Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 137.

259) Vgl. *Henneberg*, Ann. di mat. (2) 9 (1878—79), p. 54; *R. Sturm*, J. f. Math. 105 (1889), p. 117; *R. Glaser*, Tübingen, Inaug.-Dissert. 1891.

260) Vgl. „*Darboux*" 1, Chap. 7; *H. Richmond*, Math. Ann. 54 (1900), p. 323.

261) Acta math. 11 (1888), p. 135; vgl. ibid. p. 257.

$$\frac{X+iY}{1-Z} = \varkappa \frac{X_1+iY_1}{1-Z_1},$$

wo $\varkappa$ eine reelle positive Konstante bedeutet. Sind x, y, z die Koordinaten der gegebenen, x_0, y_0, z_0 die ihrer adjungierten Minimalfläche, so sind die Koordinaten der dieser Transformation entsprechenden Minimalfläche:

$$x_1 = \frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa} x - \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} y_0, \quad y_1 = \frac{1+\varkappa^2}{2\varkappa} y + \frac{\varkappa^2-1}{2\varkappa} x_0, \quad z_1 = z.$$

Durch diese Gleichungen wird die Fläche (x, y, z) auf die Fläche (x_1, y_1, z_1) konform abgebildet. Zwei sich entsprechende Punkte beider Flächen liegen in derselben zur xy-Ebene parallelen Ebene, und die in diesen Punkten berührenden und zugleich dieser Ebene angehörenden beiden Tangenten der Flächen sind parallel. Die Abbildung führt Krümmungslinien in Krümmungslinien, Haupttangentenkurven in Haupttangentenkurven über; ferner werden ebene Krümmungslinien in ebensolche, und Haupttangentenkurven, die zugleich Schraubenlinien sind, auch in ebensolche übergeführt. Wenn $\varkappa$ sich ändert, während x, y, z; x_0, y_0, z_0 fest bleiben, beschreibt der Punkt (x_1, y_1, z_1) einen Zweig einer Hyperbel, deren Mittelpunkt sich in der z-Achse befindet.

29. Einer Abwickelbaren eingeschriebene Minimalflächen. In einer weiteren Arbeit über Minimalflächen[262]) stellt sich *Lie* die Aufgabe, zu untersuchen, ob in eine gegebene algebraische abwickelbare Fläche algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können, und wie sie bejahenden Falls zu konstruieren seien. Hinsichtlich der Zylinderflächen gilt der im wesentlichen von *Henneberg*[263]) gefundene Satz, dass man in einen algebraischen Zylinder nur dann eine algebraische Minimalfläche einschreiben kann, wenn der Normalquerschnitt des Zylinders die Evolute einer algebraischen Kurve ist[264]). *Lie* erledigt die gestellte Aufgabe für einen Kegel und für eine algebraische Abwickelbare, hinsichtlich derer man bereits eine eingeschriebene algebraische Minimalfläche kennt. Die Lösung kommt in letzter Linie auf die ohne Zuhülfenahme von Integrationen bewirkte Auffindung von Minimallinien hinaus[265]). Der von *Lie* benutzte Weg ist im wesentlichen der folgende. Die Koordinaten der Punkte einer Raumkurve seien x_0, y_0, z_0, ferner seien α, β, γ; a, b, c; λ, μ, ν die Winkel,

262) Math. Ann. 15 (1879), p. 465. Vgl. *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 166, 224, 340.

263) Dissertation, p. 47.

264) Vgl. *Lie,* a. a. O. p. 466, 473; „*Darboux*" 1, p. 406.

265) „*Darboux*" 1, p. 417.

die ihre Tangente, Hauptnormale und Binormale mit den Achsen bildet, ϱ und r seien die Halbmesser ihrer ersten und zweiten Krümmung. Bestimmt man nun die Gratlinie (Nr. 2) der Abwickelbaren, die der Kurve und dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis umschrieben ist, so ist sie offenbar eine Minimallinie und ihre Koordinaten sind:

$$u = x_0 + \varrho \cos a \pm i\varrho \cos \lambda, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hülfe der *Schwarz*'schen Formeln sieht man, dass die zugehörige Minimalfläche den Ort der Krümmungsachsen (III D 1, 2, Nr. 29) der (x_0, y_0, z_0) (bei *Lie Evolute* der Kurve) in den Mittelpunkten der Kurve ersten Krümmung der Kurve berührt. Dieser Mittelpunktslinie entspricht auf der adjungierten Fläche eine Linie auf einem Kegel, dessen Erzeugende den Binormalen der Kurve (x_0, y_0, z_0) parallel sind, während die Entfernung des dem Punkte (x_0, y_0, z_0) entsprechenden Punktes dieser Linie von der Kegelspitze gleich ϱ ist. Liegt umgekehrt der Kegel vor, so liefert jede Kurve (x_0, y_0, z_0), deren Binormalen den Erzeugenden des Kegels parallel sind, eine Funktion ϱ und damit eine Kurve auf dem Kegel so, dass die längs derselben berührende Minimalfläche ohne Integration bestimmbar ist. Dabei wird diese Fläche, falls der Kegel und die Kurve (x_0, y_0, z_0) algebraisch sind, ebenfalls algebraisch. *Lie* zeigt, dass jede algebraische Minimalfläche in eine vierfache Mannigfaltigkeit von Evoluten algebraischer Raumkurven eingeschrieben ist, jedoch eine dreifache derartige Mannigfaltigkeit von Evoluten je längs einer Mittelpunktslinie berührt.

Die in Rede stehende *Lie*'sche Aufgabe ist von *Darboux* allgemein gelöst. Für einen Zylinder, dessen Normalschnitt die Evolute (S) einer algebraischen Kurve ist, ergibt sich folgende Lösung[266]). Man ordne den Punkten P von (S) die Punkte Q einer zweiten Kurve, die ebenfalls die Evolute einer algebraischen Kurve sein muss, mittelst des Parallelismus der Tangenten zu. Trägt man nun von den Punkten P aus auf den Erzeugenden des Zylinders die zu den entsprechenden Punkten Q gehörenden und negativ genommenen Bogenlängen der zweiten Kurve auf, so ergibt sich die allgemeinste Kurve, längs derer der Zylinder von einer algebraischen Minimalfläche berührt wird. — Für eine von einem Zylinder verschiedene algebraische Abwickelbare lässt sich die Lösung so aussprechen. Es mögen die Koordinaten der Gratlinie mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet und die sonstigen obigen Benennungen beibehalten werden. Sind nun x_1, y_1, z_1 die Koordinaten

266) ibid. p. 407.

einer algebraischen Kurve, deren Tangente im Punkte (x_1, y_1, z_1) der Binormalen der Gratlinie im Punkte (x_0, y_0, z_0) parallel ist, und deren Bogenlänge mit σ bezeichnet sei, so trage man vom Punkte x_0, y_0, z_0 aus auf der Tangente der Gratlinie die Strecke $r\frac{d(\sigma+r)}{ds}$ ab, wodurch man die allgemeinste Kurve, längs derer die Abwickelbare von einer algebraischen Minimalfläche berührt wird, erhält. Die Gleichungen der letzteren sind:

$$x = \Re\left\{x_0 + r\frac{d(\sigma+r)}{ds}\cos\alpha - i\left(x_1 + r\cos\lambda + r\frac{d(\sigma+r)}{ds}\cos a\right)\right\}, \text{ u. s. w.}$$

Die Grösse $r\frac{d(\sigma+r)}{ds}$ hat folgende geometrische Bedeutung. Man trage auf den Tangenten der Kurve (x_1, y_1, z_1) die entsprechenden Werte r auf und lege durch die so erhaltenen Punkte (P) Ebenen, die zu den Tangenten senkrecht sind. Diese Ebenen umhüllen eine Abwickelbare (A), deren Erzeugende den Erzeugenden der ursprünglich gegebenen Abwickelbaren parallel liegen. Jene Grösse ist der senkrechte Abstand des Punktes (P) von der ihm entsprechenden Erzeugenden der Fläche (A)[267]).

30. Methode von Ribaucour. Einen weiteren wesentlichen Beitrag zur Theorie der Minimalflächen stellt die Preisarbeit von *A. Ribaucour* aus dem Jahre 1880 dar[268]). Hier wird, wie in den Untersuchungen von *Lie*, die sogenannte imaginäre Geometrie in ausgedehnter Weise benutzt, aber zudem die Theorie der Strahlensysteme (III C 9; III D 6a, Nr. **13**; III D 9) mit der Lehre von den Minimalflächen in Verbindung gebracht. *Ribaucour* gibt zunächst einen Satz über das *harmonische* Strahlensystem, dessen Geraden je zwei solche Punkte zweier Minimalflächen treffen, in denen die Tangentialebenen der Flächen parallel sind. Teilt man die zwischen beiden Flächen liegenden Strecken auf diesen Geraden sämtlich in demselben Verhältnis, so erhält man wiederum eine Minimalfläche[269]). Sodann werden die Beziehungen der Minimalflächen zu den *isotropen* Strahlensystemen dargethan. Auf letztere kommt *Ribaucour* folgendermassen. Man beziehe irgendwie die Punkte (A) einer Fläche auf die Punkte (B) einer zweiten Fläche, sodass einem (A) nur ein (B) entspricht, und lege dann durch die Punkte A, B gerade Linien. In dem erhaltenen Strahlensystem ent-

267) „*Darboux*“ 1, p. 415.

268) Étude des élassoides, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1880).

269) Über das betreffende Strahlensystem für zwei adjungierte Minimalflächen vgl. *R. v. Lilienthal*, Untersuchungen zur allgem. Theorie der krummen Oberfl. u. geradl. Strahlensysteme, Bonn 1886, p. 88.

spricht jeder Kurve auf der ersten Fläche eine geradlinige Fläche, *Elementarfläche.* Man kann nun eine durch (A) gehende Kurve (C) auf der ersten Fläche aufsuchen derart, dass die Tangentialebenen der entsprechenden Elementarfläche in den Punkten (A) und (B) zu einander senkrecht sind. Im allgemeinen finden sich auf der ersten Fläche zwei Scharen von Kurven (C). Es können aber auch unendlich viele solcher Scharen vorhanden sein. Liegt dann nicht ein Normalensystem vor, so heisst das betreffende Strahlensystem *isotrop.* Es hat die kennzeichnende Eigenschaft, dass die kürzesten Abstände eines Strahls von seinen benachbarten Strahlen sämtlich durch denselben Punkt, den *Mittelpunkt* des Strahls, gehen, sodass die Gleichung zur Bestimmung der Grenzpunkte der kürzesten Abstände illusorisch wird. Ferner werden die Brennflächen von zwei konjugierten, *isotropen,* d. h. den unendlich fernen imaginären Kugelkreis enthaltenden Abwickelbaren gebildet. Es besteht nun der Satz: Legt man durch die Mittelpunkte der Strahlen zu den Strahlen senkrechte Ebenen, so umhüllen sie stets eine Minimalfläche[270]). — Die isotropen Strahlensysteme hängen innig mit den isothermen Kurvenscharen auf der Einheitskugel zusammen. Hat man nämlich das Quadrat des Linienelements der letzteren auf die Form gebracht: $\lambda^2(du^2 + dv^2)$, so fasse man eine Schar der Parameterlinien ins Auge und trage auf den Tangenten der Einzelkurven vom Berührungspunkte aus die Strecke λ auf. Durch die so erhaltenen Punkte lege man Gerade, die denjenigen Kugelradien parallel sind, welche in den entsprechenden Berührungspunkten enden. Es ergibt sich ein isotropes Strahlensystem. Ebenso erzeugt eine Gerade ein solches System, wenn die Endpunkte einer in ihr gelegenen Strecke von unveränderlicher Länge zwei auf einander abwickelbare Flächen beschreiben. Verschiebt man ein isotropes Strahlensystem parallel zu sich selbst und nimmt mit jedem Strahl in der neuen Lage eine Drehung von der Grösse $\frac{\pi}{2}$ um den entsprechenden Strahl in der ursprünglichen Lage vor, so entsteht ein neues isotropes System, dessen Mittelebenen dieselbe Fläche umhüllen, wie die des alten Systems. Die beiden Brennflächen eines isotropen Systems schneiden sich in einer reellen Kurve. Die zugehörige Minimalfläche berührt den Ort der Krümmungsachsen der letzteren längs der Kurve der Mittelpunkte ihrer ersten Krümmung. Ersetzt man in der obigen Konstruktion die isotherme Schar durch sämtliche Scharen ihrer isogonalen Trajektorien, so ergeben sich iso-

270) *„Bianchi"* p. 273. Vgl. *Darboux,* Paris, C. R. 104 (1887), p. 728; *„Darboux"* 1, p. 419. *J. Weingarten,* Gött. Nachr. 1890, p. 320.

trope Strahlensysteme, welche die assoziierten Flächen der der ursprünglichen Schar entsprechenden Minimalfläche liefern, und im besonderen entspricht der Schar der orthogonalen Trajektorien die adjungierte Fläche. *Ribaucour* legt auch die Transformationen dar, denen ein isotropes System mit der zugehörigen Minimalfläche (S) unterworfen werden muss, damit man zu solchen Systemen gelange, die die zu (S) associierten Flächen liefern.

31. Sätze von Schwarz, Weingarten, Dini.

1) Bezieht man mehrere Flächen (x_ν, y_ν, z_ν) so auf einander, dass in entsprechenden Punkten die Normalen der Flächen parallel sind, so nennt man, wenn die Grössen m_ν als konstant angesehen werden, die Ausdrücke

$$x = \sum m_\nu x_\nu, \qquad y = \sum m_\nu y_\nu, \qquad z = \sum m_\nu z_\nu$$

die Koordinaten der aus den gegebenen *zusammengesetzten Fläche.* Ihre Normale ist parallel der Normalenrichtung in den entsprechenden Punkten der Flächen (x_ν, y_ν, z_ν). Für die Minimalflächen besteht der Satz, dass jede aus lauter Minimalflächen zusammengesetzte Fläche wieder eine Minimalfläche ist[271]).

2) Bestimmt man die Punkte einer Minimalfläche durch ihren Abstand q vom Koordinatenanfangspunkt und durch den senkrechten Abstand p der zugehörigen Tangentialebenen von demselben Punkt — wobei, falls man das Katenoid nimmt, der Koordinatenanfangspunkt nicht auf der Rotationsachse liegen darf — und bezeichnet man mit X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche, so sind die Ausdrücke[272]):

$$x\,dp + qX dq, \quad y\,dp + qY dq, \quad z\,dp + qZ dq$$

exakte Differentiale. Ihre Integrale ξ, η, ζ sind die Koordinaten einer Fläche, bei der das Quadrat des Linienelements durch die Gleichung:

$$ds^2 = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

dargestellt werden kann, also die *Liouville*'sche Form besitzt (III D 3, Nr. 18). Umgekehrt ist jede Fläche mit diesem Linienelement auf die geschilderte Art aus einer Minimalfläche ableitbar.

3) Wenn zwischen den ersten partiellen Ableitungen einer Potentialfunktion (II A 7 b, Nr. 1) eine nicht lineare Gleichung besteht, so kann man diese Ableitungen als die Koordinaten der Punkte einer

271) *H. A. Schwarz,* Abhandl. 1, p. 174.

272) *J. Weingarten,* Gött. Nachr. 1887, p. 28.

Fläche auffassen. *J. Weingarten* zeigte in einer Untersuchung über gewisse Flüssigkeitsbewegungen (IV 16, Nr. 1 f., Anm. 50), dass die fragliche Fläche stets eine Minimalfläche ist[272a]).

4) Die Flächen mit der Eigenschaft $R_1 + R_2 = \text{const.} (\gtrless 0)$, d. h. die Parallelflächen der Minimalflächen, wurden von *Dini* mit Benutzung der *Bonnet*'schen Veränderlichen (III D 3, Nr. 7) untersucht und die hierhergehörenden Schraubenflächen bestimmt[273]).

5) *Dini*[274]) betrachtete die Eigenschaften eines Flächenpaares mit den Gleichungen:

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y),$$

wenn:

$$z_1 + iz_2 = f(x + iy).$$

Allgemeiner kann man nach den Eigenschaften zweier Flächen fragen[275]), bei denen die Koordinaten der einen die reellen, die Koordinaten der anderen die durch i dividierten imaginären Teile dreier analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind. In entsprechenden Punkten sind die Normalen parallel, die Krümmungsmasse gleich und stets negativ; entsprechende Stücke haben denselben Flächeninhalt, und die Winkel der Parameterlinien in entsprechenden Punkten sind supplementär.

VII. Flächen von konstanter Krümmung.

32. Untersuchungen von Minding, Dini, Enneper, Beltrami, Hilbert. Die Flächen, deren *Gauss*'sches Krümmungsmass (III D 1, 2, Nr. **36**; III D 3, Nrr. 7, **33**) konstant ist, pflegt man *Flächen von konstanter Krümmung* zu nennen[276]). Die ersten Untersuchungen über sie rühren von *F. Minding* her. Er fand[277]), dass die orthogonalen Trajektorien der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien einer solchen Fläche geodätische Kreise, also Kurven mit konstanter geodätischer Krümmung sind (III D 3, Nr. **38**). Man kann diesen Satz leicht zu dem umkehrbaren Satze ergänzen, dass auf einer Fläche von konstanter Krümmung die orthogonalen Trajektorien einer Schar von solchen geodätischen Linien, die einen geodätischen Kreis senkrecht schneiden,

272a) ibid. 1890, p. 318; vgl. *G. Frobenius,* ibid. 1891, p. 323.

273) Ann. di mat. 7 (1865), p. 5.

274) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

275) *R. v. Lilienthal,* J. f. Math. 98 (1885), p. 131.

276) Die Litteratur über die fraglichen Flächen bis 1896 findet sich angeführt in der Dissertation von *F. Busse,* Göttingen 1896. Vgl. auch III D 6 a, Nrr. **28**—**30**.

277) J. f. Math. 6 (1830), p. 161.

sämtlich geodätische Kreise sind und eine Isothermenschar (III D 3, Nr. **19**) bilden[278]). *Minding* zeigte ausserdem, dass alle Flächen mit demselben konstanten Krümmungsmass auf einander und auf sich selbst abwickelbar sind[279]), ferner, dass für ein geodätisches Dreieck auf einer Fläche von positiver konstanter Krümmung die Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten, und für eine Fläche von negativer konstanter Krümmung ähnliche Formeln, in denen an die Stelle trigonometrischer Funktionen hyperbolische treten[280]). Endlich verdankt man *Minding* die erste Auffindung von Flächen konstanter Krümmung, die weder abwickelbar noch sphärisch sind, nämlich die Bestimmung der hierher gehörenden Schraubenflächen[281]). *Minding* transformiert die Differentialgleichung der Flächen mit dem konstanten Krümmungsmass $\varkappa$, nämlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \varkappa\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

durch die Substitution $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ und betrachtet nun $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ als konstant und gleich h. Dann ergibt sich:

$$dz = h\,d\psi + \sqrt{\frac{1}{a^2 - r^2\varkappa} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\,dr,$$

wo a eine Integrationskonstante bedeutet. Unabhängig von *Minding* fand *U. Dini* die Schraubenflächen von konstanter negativer Krümmung und zeigte, dass sich unter ihnen eine befindet, deren Profil eine *Tractrix* (III D 4, Nr. **27**) (siehe Nr. **33**) ist[282]); er behandelte ferner eingehend die Rotationsflächen von konstanter Krümmung[283]). Die Flächen mit konstanter Krümmung und ebenen Krümmungslinien berechnete *Enneper*[284]). Die hierher gehörenden Flächen mit positivem

278) „*Darboux*", 3, p. 388; „*Bianchi*", p. 426.

279) J. f. Math. 19 (1839), p. 378; *J. Liouville,* Note IV zu *G. Monge,* Applic., Paris (1850), p. 598; *D. Codazzi,* Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 346; *Beltrami,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 311.

280) J. f. Math. 20 (1840), p. 324; *Codazzi,* a. a. O. p. 353; „*Bianchi*", p. 431; *v. Escherich*, Wien. Berichte (69) 2 (1874), p. 497. Vgl. *C. F. Gauss,* Werke 8, p. 264.

281) J. f. Math. 19 (1839), p. 376.

282) Paris, C. R. 60 (1865), p. 340; Ann. di mat. 7 (1865), p. 28; Firenze, Soc. it. Sc. Mem. (3) 2 (1869—70), p. 43; „*Bianchi*", p. 468; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *P. Vogel,* Nr. 211.

283) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 241.

284) Gött. Nachr. 1868, p. 258; 1876, p. 599; vgl. „*Bianchi*", p. 470; „*Darboux*" 3, p. 447; *M. Schilling,* Halle a/S., Modelle von *Th. Kuen,* Nr. 206, 207; *Bianchi,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 202; *Th. Kuen*, Münch. Ber. 14 (1884), p. 194.

Krümmungsmass wurden von *A. Bockholt*[285]), die mit negativem Krümmungsmass von *E. Lenz*[286]) eingehend untersucht. Es gilt hier der *Enneper*'sche Satz, dass die Ebenen der Krümmungslinien alle durch eine Gerade gehen, während die Krümmungslinien der anderen Schar auf Kugeln liegen, die die Fläche senkrecht schneiden, und deren Mittelpunkte sich auf jener Geraden befinden[287]). Die Flächen von konstanter Krümmung mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien behandelte *Enneper* ebenfalls a. a. O., und später *H. Dobriner*[288]). Hier liegen die Mittelpunkte der Trägerkugeln auf einer Geraden. — Einen Zusammenhang zwischen den Umdrehungsflächen mit positivem und denen mit negativem konstantem Krümmungsmass zeigte *Beltrami*[289]) auf Grund des folgenden Satzes: Erteilt man einer Rotationsfläche alle Translationen längs der Rotationsachse und betrachtet eine die sämtlichen Einzelflächen (A) der so erhaltenen Schar senkrecht schneidende Rotationsfläche (B), so fällt jeder Parallelkreis der letzteren mit je einem Parallelkreis auf einer Fläche (A) zusammen, und längs dieses Kreises ist das Krümmungsmass der Fläche (B) gleich dem mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Krümmungsmass der Fläche (A). Besitzt also die letztere Fläche das konstante Krümmungsmass $\varkappa$, so besitzt jede Fläche (B) das konstante Krümmungsmass $-\varkappa$. Ist (A) eine Kugel, so wird (B) die Rotationsfläche der *Tractrix*.

Hinsichtlich der Flächen von konstantem positivem Krümmungsmass mit Ausnahme der Kugel erwähnen wir den *D. Hilbert*'schen Satz[289a]), nach welchem, wenn man die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche für die Punkte im Innern und auf der Begrenzung eines singuläritenfreien, regulären Bereichs betrachtet, für keinen Punkt im Innern des Bereichs ein Maximum des einen oder ein Minimum des anderen Halbmessers erreicht wird.

33. Die Rotationsflächen von konstanter Krümmung und Linienelemente der pseudosphärischen Flächen. Zu den Rotationsflächen von konstanter Krümmung gelangt man auf verschiedenen Wegen. Man kann die ebenen Kurven aufsuchen, bei denen das Produkt aus dem zu einem beliebigen Kurvenpunkt (P) gehörenden Krümmungshalbmesser und der auf der Kurvennormalen gemessenen

285) Gött. Diss. 1878. 286) Gött. Diss. 1879.

287) „*Darboux*", 3, p. 457. 288) Acta math. 9 (1886), p. 73.

289) Ann. di mat. 6 (1864), p. 272. Vgl. *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 123.

289*) Amer. Math. Soc. Transact. 2 (1901), p. 97.

Entfernung des Punktes (P) von einer festen Geraden einen konstanten Wert besitzt (III D 4, Nr. **27**). Dieser Weg wurde von *U. Dini* in der unter [283]) zitierten Arbeit eingeschlagen[290]). Ferner kann man, von dem *Gauss*'schen Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche ausgehend, eine Form des Linienelementes unserer Flächen aufsuchen und nun die Rotationsflächen mit demselben Linienelement bestimmen. Diesen Weg benutzten *J. Liouville*[291]), *D. Codazzi*[291a]), *E. Bour*[291b]). Die Meridiankurve der fraglichen Rotationsflächen ergibt sich aus dem oben angeführten *Minding*'schen Ausdruck für $h = 0$. Zu einem Wert von $\varkappa$ gehören, den verschiedenen Werten von a entsprechend, unendlich viele Rotationsflächen, und je nach der Art des auftretenden elliptischen Integrals ergeben sich bei veränderlichem $\varkappa$ im Ganzen sechs Typen von Flächen. Für ein positives $\varkappa$ findet man ausser der Kugel den sogenannten *Spindeltypus*[292]), bei dem die Meridiankurve die Rotationsachse schneidet, und den *Wulsttypus*[292a]), bei dem jene Kurve die Rotationsachse nicht schneidet. Für ein negatives $\varkappa$ ergibt sich zunächst die *Pseudosphäre*, auch *pseudosphärische Rotationsfläche vom parabolischen Typus* genannt[293]). Sie entsteht durch Umdrehung der *Tractrix* genannten Kurve um ihre Asymptote. Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass auf jeder ihrer Tangenten das zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote gelegene Stück konstant ist. Versteht man unter φ den Winkel der Tangente der Tractrix mit der Asymptote, so wird die Pseudosphäre, falls wir die Asymptote zur z-Achse wählen und die Halbmesser der Parallelkreise mit r bezeichnen, durch die Gleichungen gegeben:

$$r = R \sin \varphi, \quad z = R \left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right).$$

Ausser der Pseudosphäre tritt hier noch die Rotationsfläche vom *elliptischen*[293a]) und die vom *hyperbolischen* Typus[293b]) auf.

290) Vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Kurven, Leipzig 1901, p. 98; Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, p. 123.

291) Fünfte Auflage von *G. Monge,* Applic., p. 597, Note 4.

291a) Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 346.

291b) J. éc. polyt. 22 (1862), p. 85.

292) *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *P. Vogel,* Nr. 200.

292a) ibid. Modell von *P. Vogel,* Nr. 201.

293) Ausführliche Behandlung der Traktrix und ihrer Rotationsfläche bei *E. Beltrami,* Ann. di mat. 6 (1864), p. 273; Giorn. di mat. 10 (1872), p. 147; vgl. „*Darboux*" 3, p. 394; „*Bianchi*", p. 191; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *J. Bacharach,* Nr. 208; *G. Loria,* das unter 178) zitierte Werk, p. 562 (III D 4, Nr. **27**).

293a) „*Bianchi*", p. 192; *M. Schilling,* Halle a. S., Modell von *J. Bacharach,* Nr. 208.

293b) „*Bianchi*", p. 193; *M. Schilling,* Halle a/S., Modell von *W. Dyck,* Nr. 209.

Hinsichtlich der Linienelemente[294]) der pseudosphärischen Flächen mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ erwähnen wir zunächst den *hyperbolischen* Typus. Betrachtet man auf einer der fraglichen Flächen eine Schar geodätischer Linien, die eine geodätische Linie (L) senkrecht schneiden, und nennt v die Bogenlänge von (L) und u die von (L) aus gerechnete Bogenlänge jener geodätischen Linien, so ergibt sich:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \text{hyp.} \frac{u}{R} dv^2.$$

Wählt man als Parameterlinien die von einem Punkt (P) ausgehenden geodätischen Linien nebst ihren orthogonalen Trajektorien und bezeichnet mit u die von (P) aus gerechnete Bogenlänge der Geodätischen, mit v den Winkel, den ihre Tangenten in (P) mit einer festen, durch (P) gehenden Flächentangente bilden, so erhält man das Linienelement vom *elliptischen* Typus mit der Gleichung:

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \text{hyp.} \frac{u}{R} dv^2.$$

Nimmt man endlich zu Parameterlinien die, eine Kurve mit der konstanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{R}$ senkrecht schneidenden, geodätischen Linien samt ihren orthogonalen Trajektorien, so ergibt sich bei entsprechender Bezeichnung wie im ersten Fall der *parabolische* Typus mit der Gleichung:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Die aufgestellten Formen des Linienelements geben Aufschluss über die geodätische Krümmung der in diesen drei Fällen auftretenden Kurven $u = \text{const.}$ Die fragliche Krümmung — absolut genommen — ist im hyperbolischen Fall stets kleiner als $\frac{1}{R}$, die entsprechenden Kurven nennt man geodätische Kreise *mit imaginären Mittelpunkten.* Im elliptischen Fall ist die fragliche Krümmung stets grösser als $\frac{1}{R}$. Man spricht hier von geodätischen Kreisen *mit im Endlichen liegenden Mittelpunkten.* Im parabolischen Fall wird die fragliche Krümmung gleich $\frac{1}{R}$. Die entsprechenden Kurven heissen hier *Grenzkreise* oder auch geodätische Kreise *mit unendlich fernen Mittelpunkten.*

Für eine Fläche von konstanter Krümmung und nur für eine solche lassen sich die Parameter so wählen, dass die endliche Gleichung der geodätischen Kreise die Form: $(u-a)^2 + (v-b)^2 = r^2$ erhält[294a]).

294) „*Bianchi*“, p. 187, 189.

294a) *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 9 (1884), p. 40; *Lie-Scheffers,* Geom. der Berührungstransf., p. 149.

34. Die geodätischen Linien auf den Flächen konstanter Krümmung. Die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer Fläche von konstanter Krümmung wurde von *J. Weingarten* auf die Auffindung einer Funktion zurückgeführt, die einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer mit ihr verträglichen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt[295]). *Beltrami* zeigte[296]), dass die Flächen von konstanter Krümmung die einzigen Flächen sind, auf denen sich die Parameterlinien so wählen lassen, dass die endliche Gleichung der geodätischen Linien die Form $mu + nv + l = 0$ erhält, wo die Grössen m, n, l willkürliche Konstanten sind, d. h. mit anderen Worten: nur für die Flächen von konstanter Krümmung gibt es eine solche Abbildung auf eine Ebene, bei der die geodätischen Linien durch gerade Linien abgebildet werden (III D 6 a, Nr. 9).

Die Bestimmung der geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche, für die das Quadrat des Linienelements bereits auf die Form $du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$ gebracht ist, führt auf eine lineare Differentialgleichung und ergibt[297]):

$$v = R\sqrt{c - e^{-\frac{2u}{R}}} + c'.$$

Um aber das Quadrat des Linienelements auf die fragliche Form zu bringen, hat man eine totale[297a]) *Riccati*'sche Gleichung zu integrieren[298]). Es ist daher auf einfach unendlich viele Arten möglich, jene Form herzustellen, und zwar werden diese Arten aus einer einzigen, bekannten, durch die Substitution bestimmt[299]):

$$v' = \frac{\left(\frac{v}{R} - a\right)R}{\left(\frac{v}{R} - a\right)^2 + e^{-\frac{2u}{R}}}, \qquad e^{-\frac{u'}{R}} = \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{\left(\frac{v}{R} - a\right)^2 + e^{-\frac{2u}{R}}},$$

wo a eine willkürliche Konstante ist.

---

295) J. f. Math. 94 (1883), p. 181; 95 (1883), p. 325. In der ersten dieser Arbeiten wird gezeigt, dass das Quadrat des Linienelements einer Fläche mit dem konstanten Krümmungsmass k auf die Form $\frac{du\,dv}{\left(\frac{k}{4} + uv\right)^2}$ gebracht werden kann, die ihrerseits eine lineare, gebrochene Transformation in sich selbst zulässt.

296) Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 185. Vgl. *R. Liouville,* Amer. J. of math. 10 (1888), p. 283; „*Darboux*" 3, p. 41.

297) „*Bianchi*", p. 419.

297a) *G. Scheffers,* das unter 253) zitierte Werk, p. 330.

298) *A. Bäcklund,* Lunds Universitets Årsskrift 19 (1882—83), p. 26; „*Bianchi*", p. 438; „*Darboux*" 3, p. 222.

299) „*Darboux*" 3, p. 413.

Die endliche Gleichung der geodätischen Linien der weiter unten erwähnten *Bianchi*'schen Ergänzungsfläche der Pseudosphäre hat *A. Wangerin* gefunden[299a]).

Hinsichtlich der geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche ist ferner zu erwähnen eine Untersuchung von *Beltrami*[300]), die auf der vorhin erwähnten Abbildung der geodätischen Linien durch gerade Linien beruht. Betrachtet man auf einer pseudosphärischen Fläche eine geodätische Linie (L) und einen Punkt (P), so gehen durch (P) gerade zwei geodätische Linien g_1 und g_2, deren Schnittpunkte mit (L) als unendlich fern betrachtet werden müssen. Zieht man jetzt auf der Fläche durch (P) eine geodätische Linie g_3, die (L) senkrecht schneidet, so bilden in (P) die Linien g_1 und g_2 mit g_3 denselben Winkel α, den man den *Parallelitätswinkel* nennt. Je nachdem eine von (P) ausgehende geodätische Linie mit g_3 einen Winkel bildet, der kleiner oder grösser als α ist, schneidet sie die Linie (L) oder sie schneidet (L) nicht. Dabei ist die Bogenlänge δ der Linie g_3, von (P) bis zu (L) gerechnet, mit dem Winkel α durch die Beziehung verbunden[301]):

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{\delta}{R}}.$$

Die Tangenten jeder der oben (Nr. **33**) betrachteten Scharen von geodätischen Linien einer pseudosphärischen Fläche müssen das Normalensystem einer W-Fläche (Nr. **17**) bilden, weil sie bei der Abwicklung der Fläche auf eine Rotationsfläche in die Meridiane der letzteren übergehen (III D 6 a, Nr. **31**). *Beltrami* bestimmte die Beziehungen, welche in jedem Fall zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 der W-Fläche bestehen[302]). Für die Flächen mit dem positiven Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ ergibt sich:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{tg}\left(c - \frac{R_1}{R}\right),$$

wo c eine Konstante bedeutet. Für die pseudosphärischen Flächen folgt im parabolischen Fall:

$$R_1 - R_2 = R,$$

im elliptischen:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{tg} \operatorname{hyp}. \frac{R_1 + c}{R},$$

im hyperbolischen:

$$R_1 - R_2 = R \operatorname{cotg} \operatorname{hyp}. \frac{R_1 + c}{R}.$$

299a) Festschrift, Halle a/S. 1894, p. 200.

300) Giorn. di mat. 6 (1868), p. 284. 301) „*Bianchi*", p. 428.

302) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 34.

Die Fläche konstanter Krümmung ist hier jedesmal die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche der W-Fläche. Die jedesmal auftretende zweite Schale — *Ergänzungsfläche* — wurde für die pseudosphärischen Flächen von *Bianchi* betrachtet[303]). Hier findet sich, dass die Ergänzungsfläche jedesmal auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Im parabolischen Fall ist diese Rotationsfläche die Umdrehungsfläche der Tractrix. Im elliptischen bez. hyperbolischen Fall wird die Meridiankurve durch die Gleichungen:

$$r = \frac{R}{\sqrt{R^2\varkappa^2+1}} \sin\psi, \quad z = R\left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right),$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{1-R^2\varkappa^2}} \sin\psi, \quad z = R\left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right)$$

dargestellt, wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Man nennt diese Meridiankurve die *verkürzte* oder *verlängerte* Traktrix.

35. Transformationen und Haupttangentenkurven der Flächen konstanter Krümmung. Die Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung zu integrieren, ist noch nicht gelungen[304]). Doch lässt sich zeigen, dass eine solche Fläche durch die Forderung bestimmt ist, dass eine gegebene Kurve auf ihr liegen, und die Fläche längs derselben eine vorgeschriebene Tangentialebene besitzen soll, die aber nicht mit der Schmiegungsebene der Kurve zusammenfallen darf. Soll aber eine gegebene Kurve Haupttangentenkurve einer pseudosphärischen Fläche sein, so muss sie eine konstante zweite Krümmung besitzen. Hier findet sich, dass eine Fläche mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ eindeutig bestimmt ist, wenn zwei von demselben Punkt ausgehende Kurven, die 1) die konstanten Torsionen $\frac{1}{R}$ und $-\frac{1}{R}$ besitzen und 2) in jenem Punkte dieselbe Schmiegungsebene, aber verschiedene Tangenten besitzen, die Haupttangentenkurven der Fläche sein sollen[305]). — Angesichts der Schwierigkeiten, die sich der Auffindung des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung unserer Flächen entgegenstellen, hat man mit Erfolg versucht, Methoden zu entwickeln, mit Hülfe derer man aus einer gegebenen Fläche konstanter Krümmung andere derartige ableiten kann, und zwar haben sich bis vor kurzem mit einer Ausnahme diese Transformations-

303) Math. Ann. 16 (1880), p. 577; *„Bianchi“*, p. 253. Vgl. *G. Bolke,* Inaug.-Dissert. Halle a/S. 1901.

304) Vgl. *J. A. Serret,* J. de Math. (1) 13 (1848), p. 361; *O. Bonnet,* J. de math. (2) 5 (1860), p. 256; *J. Weingarten,* J. f. Math. 62 (1863), p. 172; *C. Guichard,* Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 233; *S. Lie,* Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 518.

305) *Bianchi,* Roma Linc. Rend. (5) 3 (1894), p. 143; *„Bianchi“*, p. 446.

methoden ausschliesslich auf pseudophärische Flächen bezogen. Wir erwähnen zunächst einen Satz von *A. Ribaucour*[306]). Beschreibt man in den Tangentialebenen einer Fläche, deren Krümmungsmass den konstanten Wert $\frac{-1}{R^2}$ besitzt, um die Berührungspunkte Kreise mit dem Halbmesser R, so sind sie die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar, die einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört und in der jede Einzelfläche wieder das konstante Krümmungsmass $-\frac{1}{R^2}$ besitzt (III D 6 a, Nr. 29). Eine nicht wesentlich von dieser Transformation verschiedene Transformation liefert der *Bianchi*'sche Satz[307]): Ist das Quadrat des Linienelements einer pseudosphärischen Fläche (x, y, z) mit dem Krümmungsmass $\frac{-1}{R^2}$ auf die Form gebracht: $du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$, so sind:

$$x' = x - R\frac{\partial x}{\partial u}, \quad y' = y - R\frac{\partial y}{\partial u}, \quad z' = z - R\frac{\partial z}{\partial u}$$

die Koordinaten der Punkte einer pseudosphärischen Fläche mit demselben Krümmungsmass. So gehört zu jeder pseudosphärischen Fläche eine einfach unendliche Anzahl solcher abgeleiteter Flächen; ihre orthogonalen Trajektorien sind die im *Ribaucour*'schen Satze auftretenden Kreise. *Lie* bemerkte, dass man auf den abgeleiteten Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen bestimmen kann, falls man diese Linien auf der ursprünglichen Fläche kennt[308]). Diese Quadraturen sind ausführlich untersucht von *Darboux*[309]). — Eine weitere Transformation rührt von *A. Bäcklund* her[310]). Sie wurde zuerst in der folgenden, rein analytischen Form veröffentlicht. Sind x, y, z die Koordinaten einer Fläche, ist ausserdem $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ und beziehen sich die entsprechenden mit einem Strich versehenen Buchstaben auf eine zweite Fläche, so sei:

$$(x' - x)p + (y' - y)q - (z' - z) = 0,$$
$$(x' - x)p' + (y' - y)q' - (z' - z) = 0,$$
$$1 + pp' + qq' - K\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{1 + p'^2 + q'^2} = 0,$$
$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 - a^2 = 0,$$

306) Paris, C. R. 70 (1870), p. 330; „*Darboux*“, 3, p. 426.

307) Giorn. di mat. 17 (1879), p. 39; Math. Ann. 16 (1880), p. 577. Über die *Bianchi*'sche Transformation vgl. die Arbeiten von *S. Lie*, Archiv Math. og Naturv. 4 (1879), p. 507; 5 (1881), p. 282, 350.

308) Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 302; Arch. Math. og Naturv. 5 (1881), p. 518.

309) Paris, C. R. 97 (1883), p. 848, 892, 946; auch Ann. éc. norm. 3 (7) (1890), p. 9; „*Darboux*“, 3, p. 422.

310) Lunds Universitets Årsskrift 19 (1882—83), p. 7. Vgl. hierzu „*Darboux*“ 3,

wo a und K Konstante bedeuten. Diese Transformation führt eine Fläche mit dem Krümmungsmass $\frac{-1+K^2}{a^2}$ in eine einfach unendliche Anzahl von Flächen mit demselben Krümmungsmass über und fällt für $K=0$ mit der *Bianchi*'schen Transformation zusammen. Ausserdem führt sie Krümmungslinien und Haupttangentenkurven in ebensolche über und die letzteren so, dass die Länge des transformierten Kurvenbogens gleich der des ursprünglichen ist. Der geometrische Inhalt des *Bäcklund*'schen Satzes besteht darin, dass die beiden Schalen der Brennfläche eines Strahlensystems, in dem sowohl die Entfernung der Brennpunkte auf jedem Strahl, als der Winkel zwischen den beiden durch einen Strahl gehenden Brennebenen konstant ist, pseudosphärische Flächen mit demselben Krümmungsmass sind[311]). Man nennt derartige Strahlensysteme *„pseudosphärische"* Strahlensysteme[312]).

Bei der geometrischen Formulierung der *Bäcklund*'schen Transformation spielen die Eigenschaften der Haupttangentenkurven einer pseudosphärischen Fläche eine wesentliche Rolle[313]). *Dini*[314]) und *Enneper*[315]) zeigten, dass das Quadrat des Linienelementes einer solchen Fläche für die Haupttangentenkurven als Parameterlinien die Form erhält:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

wo ω der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \sin\omega.$$

In einem krummlinigen, auf der Fläche gezeichneten Viereck, dessen Seiten Haupttangentenkurven sind, haben demnach die gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen und der Flächeninhalt des Vierecks ist gleich der Summe seiner Winkel vermindert um 2π. *D. Hilbert*[315a]) folgerte aus der letzten Gleichung, dass es eine singularitätenfreie und überall regulär analytische pseudosphärische Fläche nicht gibt; *G. Lütkemeyer*, dass eine pseudosphärische Fläche nicht analytisch zu sein braucht[315b]).

---

chap. 12, und über die im Text nicht erwähnte *Lie*'sche Transformation *„Darboux"* 3, p. 381; *„Bianchi"*, p. 459 (III D 6a, Nr. **29**).

311) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 250; *E. Genty*, Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 106.

312) *„Bianchi"*, p. 282. 313) *„Bianchi"*, p. 129.

314) Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 184.

315) Gött. Nachr. 1870, p. 496. Vgl. *S. Lie*, Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345.

315a) Amer. Math. Soc. Transact. 2 (1901), p. 87 (III D 6a, Nr. **14**).

315b) Inaug.-Dissert. Göttingen 1902; ibid. p. 18 der Nachweis, dass eine Fläche von positiver konstanter Krümmung stets analytisch ist.

Nimmt man auf der Einheitskugel die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven zu Parameterlinien (III D 6 a, Nr. **33**), so wird das Quadrat des Linienelements der Kugel durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{1}{R^2}(du^2 - 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2),$$

sodass die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven dieselben Eigenschaften haben, wie die Kurven selbst. *S. Lie* zeigte[316]), dass die Haupttangentenkurven einer pseudosphärischen Fläche sich durch Quadraturen bestimmen lassen. — Betrachtet man das Tangentensystem einer Kurvenschar auf einer pseudosphärischen Fläche, in dem der Winkel jeder Tangente mit der durch den Berührungspunkt gehenden, zu R_1 gehörenden, Krümmungslinie mit ω_1 bezeichnet wird, und verlangt, dass es ein pseudosphärisches Strahlensystem mit der konstanten Entfernung $R\cos\sigma$ der Brennpunkte sei, so zeigt sich, dass $2\omega_1$ der Winkel der Haupttangenten auf der zweiten Schale der Brennfläche ist. Es genügt daher ω_1 derselben Differentialgleichung wie ω, wird aber durch eine *Riccati*'sche Gleichung bestimmt, sodass ω_1 ausser σ noch eine willkürliche Konstante enthält. *Bianchi*[317]) zeigte, dass, wenn man aus einer pseudosphärischen Fläche durch zwei zu den Konstanten σ_1 und σ_2 gehörende *Bäcklund*'sche Transformationen zwei neue pseudosphärische Flächen S_1 und S_2 herleitet, sich dieselbe Fläche ergibt, sei es, dass man mit S_1 die zu σ_2, oder mit S_2 die zu σ_1 gehörende Transformation ausführt. Kennt man sämtliche ∞^2 zu einer pseudosphärischen Fläche gehörenden *Bäcklund*'schen Transformationen, so erfordert die Bestimmung dieser Transformationen für die abgeleiteten Flächen nur Differentiationen und abgebraische Rechnungen, zudem lassen sich die Gleichungen der geodätischen Linien auf den abgeleiteten Flächen ohne Integration in endlicher Form angeben[318]).

Hinsichtlich der Flächen mit dem positiven Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ bemerkt *O. Bonnet*[319]), dass zu jeder von ihnen zwei im Abstande $\pm R$ befindliche Parallelflächen gehören, deren mittlere Krümmung $\pm\frac{1}{R}$ ist. Umgekehrt besitzt jede Fläche von konstanter mittlerer Krümmung unter ihren Parallelflächen auch eine solche von konstanter positiver Krümmung (III D 6 a, Nr. **30**). Es lassen sich aber, wie *Bonnet*[320]) zeigte, die Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung so biegen, dass die Haupt-

316) Bull. sci. math. (2) 4 (1880), p. 304; Arch. Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345. 317) Roma, Linc. Rend. (5) 1 (1892^2), p. 3.

318) „*Bianchi*", p. 465. 319) Nouv. ann. (1) 2 (1853), p. 437.

320) J. éc. polyt. 25 (1867), p. 77; „*Darboux*" 3, p. 384.

krümmungsradien ungeändert bleiben. Damit ist eine Transformation der Flächen mit konstanter positiver Krümmung gegeben. — Eine zweite Transformation stellte *J. H. Hazzidakis* auf[321]). Bei ihr entsprechen den geodätischen Linien der ursprünglichen Fläche auf der transformierten Fläche Schattenlinien bei parallel einfallenden Lichtstrahlen (III A 6). — In neuester Zeit ist es auf Grund eines *Guichard*'schen[322]) Satzes gelungen, für unsere Flächen eine ähnliche Transformationstheorie zu entwickeln, wie sie für die pseudosphärischen Flächen besteht[323]). Man denke sich eine durch das Normalensystem einer Fläche (S) mit der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$ hindurchgelegte Fläche (Σ) und betrachte die Normalen als fest mit Σ verbunden, so dass sie bei einer Biegung von Σ ihre Lagen gegen die zugehörigen Flächenelemente nicht ändern. Es ist auf ∞^3 Arten möglich, die Fläche Σ so zu wählen, dass sie 1) auf ein verlängertes Rotationsellipsoid mit der grossen Achse $2R$, oder auf ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit der Hauptachse $2R$ abwickelbar ist, und dass 2) jene Strahlen bei den Verbiegungen von Σ die Normalen einer Fläche von der Krümmung $\frac{1}{R^2}$ bleiben. Reflektiert man nun die Normalen von (S) an einer Fläche Σ und fasst auf den reflektierten Strahlen die Punkte (P) ins Auge, die hinsichtlich der Tangentialebenen von Σ symmetrisch zu den entsprechenden Punkten von (S) liegen, so bilden die Punkte (P) eine Fläche mit der Krümmung $\frac{1}{R^2}$, deren Normalen die reflektierten Strahlen sind.

VIII. Weitere besondere Flächen.

36. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Hauptkrümmungshalbmesser. a) Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung[324]). Die Krümmungslinien dieser Flächen sind isotherm[325]), ihre Minimalkurven lassen sich durch Quadraturen bestimmen[325a]). Die Meridiankurve der Rotationsflächen mit der konstanten mittleren Krümmung $\frac{1}{R}$ wird von einem Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel, deren grosse Achse bezw. Hauptachse gleich R ist, beschrieben, falls die betreffende

321) J. f. Math. 88 (1879), p. 68.

322) Paris, C. R. 128 (1899), p. 232.

323) *Bianchi,* Ann. di mat. (3ª) 3 (1899), p. 185; „*Bianchi*", p. 641. Vgl. *Darboux,* Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 465.

324) Vgl. *M. Chini,* Giorn. di mat. 27 (1889), p. 107.

325) *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 25 (1867), p. 77; „*Darboux*", 2, p. 245; 3, p. 383.

325ª) *S. Lie,* die unter 167) zitierten Arbeiten.

Kurve auf einer Geraden rollt ohne zu gleiten; diese Gerade ist zur Rotationsachse zu nehmen. Für $R = \infty$ hat man eine Parabel rollen zu lassen, wo dann ihr Brennpunkt eine Kettenlinie beschreibt[326]). Im Anschluss an diesen *Delaunay*'schen Satz zeigte *M. Sturm*[327]), dass sich dieselbe Meridiankurve ergibt, wenn man die Rotationsfläche aufsucht, die bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzt. *Darboux*[329]) gab den folgenden Satz: Wenn zwei im Abstand h von einander parallele Flächen die Strecken zwischen den Mittelpunkten ihrer Hauptnormalkrümmungen auf jeder Normale harmonisch teilen, so besitzen sie beide dieselbe konstante mittlere Krümmung $\frac{1}{h}$.

b) *Appell*'sche Flächen. *P. Appell*[329]) betrachtete die Flächen, bei denen die senkrechte Projektion eines festen Punktes auf jede Normale den Mittelpunkt der Strecke zwischen den Endpunkten der Hauptkrümmungshalbmesser trifft, d. h. der Abstand des festen Punktes von der Tangentialebene gleich $\frac{R_1+R_2}{2}$ ist. Zu jeder Funktion einer komplexen Veränderlichen gehört eine derartige Fläche. Jedes unendlich dünne Normalenbündel einer solchen Fläche schneidet aus einer festen Kugel beim Eintritt und beim Austritt gleiche unendlich kleine Flächenteilchen aus. Fällt der feste Punkt mit dem Koordinatenanfangspunkt (O) zusammen, und ist (P) ein Punkt einer Minimalfläche, so konstruiere man eine Ebene (E), die parallel der in (P) berührenden Tangentialebene der Minimalfläche liegt, und deren Abstand von (O) gleich dem Abstand des Punktes (P) von der xy-Ebene ist. Durchläuft (P) die Minimalfläche, so werden die Ebenen (E) von einer *Appell*'schen Fläche eingehüllt. Auch die Beziehung dieser Flächen zu den von *Bonnet*[330]) aus einer Minimalfläche abgeleiteten, bei welchen die Mittelpunkte der Normalen in einer Ebene liegen, ist von *Appell* dargethan. *E. Goursat*[331]) und *E. Baroni*[332]) untersuchten die Flächen, bei denen der Abstand des festen Punktes von den Tangentialebenen proportional $\frac{R_1+R_2}{2}$ ist.

326) *Ch. Delaunay,* J. de math. (1) 6 (1841), p. 309; Paris, C. R. 13 (1841), p. 84.

327) J. de math. (1) 6 (1841), p. 315; *M. Schilling,* Halle a/S., Modelle von *A. v. Braunmühl,* Nr. 217—220. Vgl. die Dissertationen von *G. Hormann,* Göttingen 1887 und *W. Howe,* Berlin 1887, wo sich auch weitere historische Angaben finden (III D 4, Nr. **11**.)

328) Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 467.

329) American Journ. of math. 10 (1888), p. 175.

330) Paris, C. R. 42 (1856), p. 486; „*Darboux*" 1, p. 255.

331) American Journ. of math. 10 (1888), p. 187.

332) Giorn. di mat. 28 (1890), p. 349.

c) *Bianchi*'sche Flächen[333]). Sie sind gefunden auf Grund einer Methode, die *Weingarten* veröffentlicht hat[334]). Hier haben die Kugeln, welche über den Strecken zwischen den Endpunkten von R_1 und R_2 als Durchmesser beschrieben sind, die Eigenschaft entweder eine feste Kugel senkrecht zu schneiden (hyperbolischer Fall) oder eine feste Kugel in einem grössten Kreis zu schneiden (elliptischer Fall) oder durch einen festen Punkt zu gehen (parabolischer Fall). In den beiden letzten Fällen haben die Flächen mit den pseudosphärischen Flächen das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein; im hyperbolischen Fall ebenfalls da, wo die senkrechte Projektion des Mittelpunkts der festen Kugel auf die Normalen der Fläche zwischen die Endpunkte von R_1 und R_2 fällt, sonst hat die Fläche mit denen von konstanter positiver Krümmung das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein.

d) *De Montcheuil*[334a]) bestimmte die Flächen mit der Eigenschaft:

$$R_1 + R_2 = F(u) + F_1(u_1),$$

wo u und u_1 solche komplexe Parameter sind, mit Hülfe derer die Richtungskosinus der Flächennormalen die Formen erhalten:

$$X = \frac{u + u_1}{uu_1 + 1}, \quad Y = i\frac{u_1 - u}{uu_1 + 1}, \quad Z = \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}.$$

Gibt man der Gleichung der Tangentialebene die Form:

$$(u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + \xi = 0,$$

so genügt hier ξ der Bedingung:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0,$$

und für das Normalensystem der fraglichen Flächen lässt sich eine geometrische Erzeugungsart angeben.

37. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Krümmungslinien. a) Isotherme Flächen[334b]). Mit diesem Namen belegt man neuer-

333) Ann. di mat. (2) 24 (1896), p. 347.

334) Paris, C. R. 112 (1891), p. 607; 116 (1893), p. 493.

334a) Par. soc. math. Bull. 26 (1898), p. 103; 27 (1899), p. 114.

334b) Vgl. die Inaug.-Dissert. von *H. Willgrod*, Göttigen 1883, in der die isothermen W-Flächen bestimmt werden, und der Satz bewiesen wird, dass die Transformation mittelst reziproker radii vectores isotherme Flächen in ebensolche überführt. „*Darboux*" 2, chap. 11, wo gezeigt wird, dass die fünf pentasphärischen Koordinaten (III A 7) einer isothermen Fläche, als Funktionen der Parameter der Krümmungslinien betrachtet, einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit gleichen Invarianten (II A 5, Nr. 53) genügen. Vgl. ferner: *Lie-Scheffers*, Vorl. über Differentialgleichungen, Leipzig 1891, p. 178.

dings die Flächen mit isothermen Krümmungslinien. *Weingarten*[335]) sprach die Bedingung für die fragliche Eigenschaft einer Fläche so aus: Ist die Fläche durch eine Gleichung von der Form $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so muss der Ausdruck:

$$\frac{1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}\left\{\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial x}\,dX + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial y}\,dY + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial z}\,dZ - d\varrho_1\varrho_2\right\}$$

das Totaldifferential einer Funktion des Orts in der Fläche sein; sind aber die Koordinaten der Fläche als Funktionen der Parameter u und v der Krümmungslinien gegeben, so muss der Ausdruck:

$$d\log(\varrho_1 - \varrho_2)^2 + \frac{\partial \log G}{\partial u}\,dv + \frac{\partial \log E}{\partial v}\,dv$$

ein exaktes Differential sein. Andere Formen dieser Bedingung stellten *J. Knoblauch*[336]) und *G. Frobenius*[337]) auf. *Darboux*[338]) betrachtete isotherme Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien und fand, dass die Ebenen der letzteren einen Kegel umhüllen. Den Fall, dass der Kegel in einen Zylinder ausartet, untersuchte *P. Adam*[339]). Der fragliche Umstand findet bei den hierher gehörenden Flächen von konstanter mittlerer Krümmung statt[340]). Hingewiesen sei auf eine Arbeit von *A. Thybaut*[341]), in der unter anderem gezeigt wird, dass die beiden Schalen einer Fläche, die eine doppelt unendliche Schar von Kugeln umhüllt, stets isotherm sind, wenn die auf jeder Kugel liegenden Berührungspunkte mit der Einhüllenden harmonisch sind zu den Brennpunkten der durch die Berührungspunkte gelegten Strahlen.

b) *Guichard-Bianchi*'sche Flächen. *C. Guichard*[342]) betrachtete die Flächen, bei denen in jedem Punkt die senkrechten Abstände der beiden Hauptnormalebenen von einem festen Punkt ein konstantes

---

Über die Integration der Differentialgleichung der isothermen Flächen vgl. *R. Rothe*, Inaug.-Dissert. Berlin 1897, wo sich weitere Litteraturangaben finden.

335) Berlin, Sitzungsberichte (1883), p. 1163.

336) J. f. Math. 103 (1888), p. 40.

337) ibid. 110 (1892), p. 34.

338) Bull. sci. math. (2) 7 (1883), p. 257; Paris, C. R. 96 (1883), p. 1202, 1294; „*Darboux*“ 4, p. 235.

339) Ann. éc. norm. (3) 10 (1893), p. 319.

340) Vgl. *M. Voretzsch*, Göttingen, Inaug.-Dissert. 1883.

341) Paris, C. R. 131 (1900), p. 932. Auf eine weitere besondere Art isothermer Flächen machte *L. Raffy* aufmerksam: ibid. 128 (1899) p. 285. Isotherme Flächen, die mit der Biegung eines Paraboloids in Verbindung stehen, behandelte *A. Thybaut*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 45 (III D 6 a, Nrr. **13**, **31**); solche, die mit dem Rollen einer Fläche zweiter Ordnung auf einer Abwickelbaren in Verbindung stehen, *G. Darboux*, ibid. p. 497 (III D 6 a, Nr. **18**).

342) Paris, C. R. 116 (1893), p. 487.

Verhältnis haben und gab eine Transformation dieser Flächen, die wieder zu solchen führt. *Bianchi*[343]) zeigte, dass diese Flächen zu den früher von ihm untersuchten[344]) gehören, auf denen ein doppelt unendliches System von isogonalen Trajektorien der Krümmungslinien vorhanden ist, welches die Fläche in infinitesimale äquivalente Parallelogramme teilt. Beschreibt man um den festen Punkt eine Kugel und konstruiert alle Kreise, welche die Kugel und eine feste Fläche mit der fraglichen Eigenschaft senkrecht schneiden, so sind sie die orthogonalen Trajektorien einer Flächenschar, die aus lauter Flächen mit derselben Eigenschaft besteht. Ebenso geht jede Fläche mit dieser Eigenschaft durch eine Inversion von dem festen Punkt als Pol aus in eine ebensolche über.

c) Hypercyklische Flächen. Mit dieser Benennung belegt *Bianchi*[345]) die Flächen mit einer Schar von Krümmungslinien, deren erste Krümmung konstant ist. Zu einer jeden solchen Fläche gehört eine zweite mit derselben Eigenschaft. Sie ist der Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung der fraglichen Krümmungslinien. Man kann hier eine der *Bäcklund*'schen ganz ähnliche Transformationstheorie entwickeln. Dasselbe gilt von den von *E. Nannei*[346]) untersuchten Flächen, bei denen die erste Krümmung der Krümmungslinien einer Schar nur längs jeder Einzelkurve als konstant vorausgesetzt wird.

d) Die Flächen mit einem System kongruenter Krümmungslinien untersuchte *J. N. Hazzidakis*[347]). Wenn hier die erzeugenden Kurven doppelt gekrümmt sind, bleiben auch die von den Flächennormalen berührten Evoluten der Erzeugenden kongruent, und man hat es mit Schraubenflächen zu tun.

e) Eine Untersuchung über die Flächen, bei denen in jedem Punkte die beiden, die Tangenten der Krümmungslinien enthaltenden, Normalebenen in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung konjugiert sind, findet sich bei „*Darboux*“ 2, chap. 14.

38. Flächen mit besonderen Eigenschaften der Haupttangentenkurven und konjugierten Linien. a) *Bianchi*[348]) betrachtete die Flächen, auf denen die Haupttangentenkurven der einen Schar konstante Torsion besitzen. Die fraglichen Linien werden dann durch

343) Roma, Linc. Rend. (5) 3^2 (1894), p. 77.

344) Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 349. 345) ibid. (2) 13 (1885), p. 222.

346) Giorn. di mat. 26 (1888), p. 201.

347) J. f. Math. 98 (1885), p. 49. Vgl. *M. Bricard*, Paris, C. R. 130 (1900), p. 475 und *A. Demoulin*, ibid. p. 823.

348) Roma Linc. Rend. (4) 6^1 (1890), p. 352 u. Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 340.

die Haupttangentenkurven der anderen Schar in proportionale Bögen geteilt, und dieselbe Eigenschaft besitzen die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven. Mittels einer der *Bäcklund*'schen ähnlichen Transformation lassen sich aus jeder der fraglichen Flächen andere herleiten, auf denen die Kurven der einen Schar der Haupttangentenkurven dieselbe konstante Torsion und dieselbe Bogenlänge besitzen, wie die entsprechenden Haupttangentenkurven der ursprünglichen Fläche.

b) Die Flächen, auf denen eine Schar von Haupttangentenkurven aus Schraubenlinien besteht, die auf parallelen Zylindern liegen, bestimmte *Dini*[349]). Die orthogonalen Trajektorien der Haupttangentenkurven liegen in Ebenen, die zur Achse der Schraubenlinien senkrecht sind.

c) *P. Stäckel*[350]) betrachtete die Flächen, die durch die Haupttangentenkurven in unendlich kleine Rhomben mit konstanten Winkeln geteilt werden (III D 6 a, Nr. **30**). Hier ist das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ konstant. Ist es gleich -1, so ergeben sich die Minimalflächen; ist es von -1 verschieden, so gehen die zu ein und demselben Winkel der Haupttangentenkurven gehörenden Flächen alle aus einer einzigen durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor, und letztere ist eine Rotationsfläche.

d) Die von *S. Lie* behandelte Frage nach den Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören, wird erörtert in der Inaug.-Dissertation von *A. Peter* (Leipzig 1895), woselbst sich weitere Litteraturangaben finden[350a]).

e) *K. Peterson* nennt eine auf einer Fläche liegende Kurve *zylindrisch* oder *konisch*, wenn die Fläche längs der Kurve von einem Zylinder oder einem Kegel berührt wird. Die Flächen, auf denen es zwei konjugierte Scharen zylindrischer Kurven gibt, fallen mit den Translationsflächen zusammen (Nr. **6**). Für die Koordinaten der Punkte der Flächen, auf denen es zwei konjugierte Scharen konischer Kurven gibt, erhält *Peterson* die Darstellung[351]):

$$x = \frac{\psi_1 + \chi_1}{\psi + \chi}, \quad y = \frac{\psi_2 + \chi_2}{\psi + \chi}, \quad z = \frac{\psi_3 + \chi_3}{\psi + \chi},$$

349) Ann. di mat. (2) 4 (1870—71), p. 190.

350) Leipzig, Berichte 1896, p. 491; ibid. 1898, p. 10.

350a) Vgl. *Lie-Scheffers*, Geom. der Berührungstransf., p. 369.

351) Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, p. 27; vgl. *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 205. Daselbst p. 207, 214 weitere konjugierte Systeme; solche, die aus ebenen Kurven bestehen, bei „*Darboux*" 1, p. 123.

wo $\psi \dots \psi_3$ Funktionen von u allein, $\chi \dots \chi_3$ Funktionen von v allein bedeuten.

f) *L. Raffy* bestimmte die Flächen, deren Koordinaten sich durch die Gleichungen:

$$x = \varphi_1(u)\psi_1(v), \quad y = \varphi_2(u)\psi_2(v), \quad z = \varphi_3(u)\psi_3(v)$$

darstellen lassen, während die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ konjugiert sind, und zeigte, dass die Bestimmung der Haupttangentenkurven dieser Flächen nur Quadraturen erfordert[351a]). Diejenigen unter diesen Flächen, bei denen die Tangenten der Parameterlinien ein und demselben tetraedralen Komplex (III D 4, Nr. **35**) angehören, dessen Fundamentaltetraeder aus den Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene besteht, sind, wie *A. Demoulin* zeigte[351b]), die einzigen Flächen, auf denen ein konjugiertes Kurvensystem mit der fraglichen Eigenschaft seiner Tangenten vorhanden ist.

g) *L. Raffy* bestimmte die Flächen, auf denen die von den Ebenen eines Büschels ausgeschnittenen Kurven mit ihren konjugierten Kurven ein System mit gleichen Invarianten bilden[351c]) (II A 5, Nr. **53**; III D 3, Nr. **37**).

39. Flächen mit besonderen Eigenschaften der geodätischen Linien und geodätischen Kreise. a) *A. Voss*[351d]) bemerkte bei den Flächen mit einem System konjugierter geodätischer Linien die Eigenschaft, dass die sphärischen Bilder dieser Kurven mit denen der Haupttangentenkurven der pseudosphärischen Flächen übereinstimmen (III D 6 a, Nr. **25**). *C. Guichard*[352]) wurde zu den fraglichen Flächen auf folgende Art geführt: Das Tangentensystem der zu R_1 gehörenden Krümmungslinien auf einer Fläche (S) besitzt als zweite Schale der Brennfläche eine Fläche (S_1), die der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen der zu R_2 gehörenden Krümmungslinien ist. Den Krümmungslinien auf (S) entsprechen auf (S_1) stets konjugierte Kurven. Falls diese sich aber rechtwinklig schneiden, entspricht den Krümmungslinien von (S) auf der zu R_1 gehörenden Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche von (S) ein System konjugierter, geodätischer Linien.

351a) Par. soc. math. Bull. 24 (1896), p. 2.

351b) ibid. 25 (1897), p. 83. 351c) ibid. 24 (1896), p. 54.

351d) München, Berichte 1888, p. 95; Math. Ann. 39 (1891), p. 253. Vgl. *A. Razzaboni,* Bologna, Mem. (4) 9 (1888), p. 765, wo gezeigt wird, dass die gewöhnliche Schraubenfläche die einzige hierher gehörende Minimalfläche ist. *„Darboux"* 4, p. 103, 105; *„Bianchi"*, p. 284; *C. Guichard,* Paris, C. R. 110 (1890), p. 995.

352) Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 231.

b) Betrachtet man in einem dreifach orthogonalen Flächensystem (III D 1, 2, Nr. 23; III D 6 b), bei dem die eine Schar aus Flächen mit demselben konstanten negativen Krümmungsmass besteht, diejenigen orthogonalen Trajektorien dieser Schar, welche eine Haupttangentenkurve einer Einzelfläche treffen, so schneidet die von ihnen gebildete Fläche (S) auch die anderen Flächen der Schar in Haupttangentenkurven; (S) besitzt somit eine Schar geodätischer Linien von konstanter Torsion. *C. Fibbi*[353]) untersuchte die Flächen mit einem System geodätischer Linien, deren Torsionen nur von Kurve zu Kurve sich ändern, und weiter diejenigen unter ihnen, bei denen die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien entweder Kreise mit demselben Radius sind oder konstante erste Krümmung besitzen. In beiden Fällen treten ähnliche Transformationen, wie die *Bäcklund*'sche auf.

c) Über Flächen mit einem System kongruenter geodätischer Linien oder kongruenter Haupttangentenkurven vgl. eine Arbeit von *J. N. Hazzidakis*[354]).

d) Sind die Koordinaten der Punkte einer Fläche als Funktionen der Parameter u und v gegeben, so versteht man unter einer *linearen* Schar von geodätischen Linien eine solche, die durch gerade, parallele Linien in der u, v-Ebene abgebildet wird, deren Gleichung sich also in der Form: $au + bv =$ const. darstellt. *G. Finsterwalder*[355]) zeigte, dass eine Fläche, auf der vier wesentlich verschiedene derartige Scharen vorkommen, notwendig konstantes Krümmungsmass besitzen muss. Auf den Rotationsflächen gibt es drei solche Scharen. Die Frage nach der Form des Quadrats des Linienelements der Flächen, auf denen drei lineare Scharen vorkommen, behandelten *F. Ahl*[356]) und *P. Stäckel*[357]). Es zeigt sich, dass hier auch eine solche Form auftreten kann, die für eine Spiralfläche (Nr. 7) kennzeichnend ist.

e) Die Frage nach denjenigen Flächen, deren sämtliche geodätische Linien geschlossen sind, scheint bisher nur für die Rotationsflächen beantwortet zu sein[357a]). *G. Darboux* entwickelte in dem Lehrbuche von *M. Despeyrous*[358]) eine Methode zur Auffindung von derartigen Rotationsflächen. Auf Grund derselben fand *J. Tannery*[359]) die Rotationsfläche mit der Gleichung:

---

353) Pisa Ann. 5 (1888), p. 79. 354) J. f. Math. 95 (1883), p. 120.
355) Deutsch. Math.-Vereinig. Jahresber. 6 (1899), p. 50.
356) Inaug.-Diss. Kiel 1901. 357) Math. Ann. 56 (1902), p. 502.
357a) Vgl. *P. Stäckel*, Deutsche Math.-Ver. Jahresber. 9 (1901), p. 128.
358) Cours de Mécanique 2, Paris 1887, p. 467. Vgl. „*Darboux*" 2, p. 454; 3, p. 6. 359) Bull. sci. math. (2) 16 (1892), p. 190.

$$16a^2(x^2+y^2)=z^2(2a^2-z^2),$$

deren geodätische Linien nicht nur sämtlich geschlossen, sondern auch algebraisch sind. *O. Zoll*[360]) behandelte ausführlich die Flächen mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien und fand eine singularitätenfreie Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

f) (vgl. III D 3, Nr. **38**). Von *O. Bonnet* wurden die Flächen bestimmt, auf denen die Krümmungslinien aus geodätischen Kreisen bestehen[361]). Man hat es hier mit den Einhüllenden einer Schar von Kugeln zu tun, die durch zwei feste reelle oder imaginär konjugierte Punkte gehen. *A. Ribaucour*[362]) leitete das *Bonnet*'sche Ergebnis auf geometrischem Wege her. Nach „*Darboux*" 3, p. 121 bestehen die fraglichen Flächen aus den Rotationsflächen, den Kegeln, den Zylindern und den aus diesen Flächen durch Inversion sich ergebenden Flächen. *A. Voss* zeigte, dass, wenn auf einer Fläche zwei Kurvenscharen liegen, von denen jede aus geodätischen Kreisen von gleicher geodätischer Krümmung besteht, und die sich zudem unter konstantem Winkel schneiden, die Fläche ein konstantes negatives Krümmungsmass besitzt[363]). Die Frage nach den Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen wurde von *F. Probst*[364]) eingehend behandelt. Wir erwähnen den Satz, dass eine Fläche mit mehr als zwei Orthogonalsystemen von geodätischen Kreisen unendlich viele solcher Systeme und damit konstantes Krümmungsmass besitzt.

40. Imaginäre Flächen. Beschränkt man sich nicht auf reelle Flächen, sondern lässt auch imaginäre Flächen zu, so erhalten die Sätze der Flächentheorie mannigfache Erweiterungen, die analytisch von Interesse sind, und von *G. Scheffers* (Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902) systematisch berücksichtigt werden. Der zuerst behandelte Fall[365]) trat bei der von *G. Monge* untersuchten Frage nach den Flächen auf, bei denen in jedem Punkt die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich sind. Ausser der Kugel ergeben sich imaginäre Flächen mit nur *einer* Schar von Krümmungslinien, Flächen, bei denen also die beiden quadratischen Fundamentalformen einen gemeinsamen Faktor besitzen (III D 6a, Nr. **2**). Eine derartige Fläche von konstantem Krümmungsmass wurde von *J. A. Serret* be-

360) Inaug.-Dissert. u. Preisschrift, Göttingen 1901 (III D 6a, Nr. **14**).

361) J. éc. polyt. 25 (1867), p. 133.

362) Bull. soc. philom. 6 (1869), p. 1; 7 (1870), p. 24; vgl. *P. Adam,* Par. soc. math. Bull. 22 (1894), p. 110.

363) Münch. Ber. 22 (1892), p. 268.

364) Inaug.-Dissert. Würzburg 1893.

365) *Monge,* Application d'Analyse à la Géom., 5te Aufl. Paris 1850, p. 196.

merkt[366]). Eingehend untersucht wurden die fraglichen Flächen von *P. Stäckel*[367]) und *G. Scheffers*[368]). Der erstere zeigte, dass die Krümmungslinien dieser Flächen aus Minimalgeraden bestehen[369]), der letztere, dass längs jeder solchen Geraden das Krümmungsmass der Fläche konstant ist. *Stäckel* fand, dass die Fläche überhaupt konstantes Krümmungsmass besitzt, wenn der Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte eine Minimalkurve ist. Für diesen Fall wurden die Koordinaten der Punkte der Fläche von *Scheffers* mittelst dreier Quadraturen, von *Stäckel* durch von Integralen freie Ausdrücke dargestellt.

An zweiter Stelle erwähnen wir die Tangentenflächen der Minimalkurven. Sie werden von *G. Darboux*[370]) zuerst *développables focales*, später *développables isotropes*, von *G. Scheffers Minimaldeveloppable* genannt (III D 6 a, Nr. 2). Wir sind ihnen in Nr. **15, 29, 30** bereits begegnet. Die Determinante $EG - F^2$ ist hier stets Null, während keine Fundamentalgrössen zweiter Ordnung auftreten[371]).

Endlich sei die algebraische imaginäre Fläche erwähnt, die sich aus der *Cayley*'schen Linienfläche (Nr. **6**, Anm. 83) durch eine lineare, imaginäre Koordinatentransformation ergibt. Sie tritt zuerst bei *S. Lie* auf als Minimalfläche dritter Klasse[372]), sodann als Minimalfläche mit unendlich vielen Translationserzeugungen[373]) (Nrr. **6, 27**). *Ribaucour*[374]) fand, dass die Frage nach den geradlinigen Minimalflächen ausser auf die gewöhnliche Schraubenfläche noch auf eine imaginäre Fläche führt, deren Linienelement er bestimmt. Diese Fläche fällt nach den Untersuchungen von *A. Demoulin*[375]) mit der *Lie*'schen Fläche zusammen, sie erscheint hier als Hauptnormalenfläche einer kubischen Raumkurve. (Vgl. die ausführliche Darstellung von *G. Scheffers*[376]).

366) J. de math. (1) 13 (1848), p. 361.

367) Leipz. Ber. 1896, p. 478; 1902, p. 108.

368) Einführung in die Theorie der Flächen, p. 114, 228, 229.

369) Vgl. „*Darboux*" 3, p. 295.

370) Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et la théorie des imaginaires, Paris 1873, p. 9.

371) *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, p. 29, 107; *Lie-Scheffers*, Geom. der Berührungstransf., p. 429, 432.

372) Math. Ann. 14 (1878), p. 353.

373) Arch. Math. og Naturv. 3 (1878), p. 488.

374) Die unter 268) zitierte Arbeit, p. 72.

375) Bruxelles Mém. cour. in 4°, 58 (1899).

376) Einführung in die Theorie der Flächen, p. 242 (III D 4, Nr. **20**).

(Abgeschlossen im August 1903.)

Nachtrag zu III D 3.

p. 109, Fussn. 6[e]), statt 1901 lies: 1900.

p. 124, Z. 11, statt $\frac{\partial \beta}{\partial u}$ lies: $-\frac{\partial \beta}{\partial u}$.

p. 133, Z. 27, hinter „Ausdruck" lies: auf *J. Liouville*'s Vorschlag (*Monge,* Applic. Note I, p. 568).

„ „ Z. 28, statt *R. Liouville* lies: *J. Liouville.*

p. 155, Fussn. 130), vgl. *J. Liouville,* J. de math. (1) 11 (1846), p. 362; Note II in *Monge,* Applic. p. 569; *„Darboux"* 1, p. 148.

p. 168, Fussn. 170), statt 2 lies: 9.

p. 174, Fussn. 183). Wohl zuerst bei *J. Liouville,* J. de math. (1) 12 (1847), p. 281.

p. 176, Z. 7—9, lies: Sie gehen durch projektive Transformation[191]) und durch Transformation mittels reziproker Polaren (*„Darboux"* 1, p. 137) wieder in Haupttangentenkurven über.

Fussn. 191), statt 408 lies: 406.

p. 178, Z. 10, statt Radien lies: Polaren.

p. 181, Fussn. 207). Vor *„Darboux"* lies: *O. Bonnet,* J. éc. polyt. 25 (1867), p. 132.

III D 6 a. ABBILDUNG UND ABWICKELUNG ZWEIER FLÄCHEN AUF EINANDER.

Von

A. VOSS

in Würzburg.

Inhaltsübersicht.

A. Einleitung.

1. Vorbemerkungen.
2. Allgemeine Übersicht über die Probleme der Abbildung und Abwickelung (Isometrie und Biegung) der Flächen.

B. Die Abbildung der Flächen.

3. Die konforme oder winkeltreue Abbildung.
4. Besondere konforme Abbildungen.
5. Vorteilhafteste konforme Abbildung.
6. Konforme Abbildung bei Räumen von mehr Dimensionen.
7. Die äquivalente oder flächentreue Abbildung.
8. Die Kartenkonstruktionen.
9. Die geodätische Abbildung.
10. Die projektive Abbildung.
11. Die sphärische Abbildung.
12. Andere Abbildungen.
13. Die Strahlensysteme.
14. Abbildungen allgemeineren Charakters.

C. Die Isometrie der Flächen.

a. Allgemeine Probleme.

15. Das *Minding*'sche Problem.
16. In sich isometrische Flächen.
17. Kongruenz zweier Flächen.
18. Das *Bour*'sche Problem.
19. Allgemeine Sätze über die isometrische Zuordnung zweier Flächen.

b. Spezielle Probleme.

1) Isometrische Untergruppen.

20. Untergruppen, bedingte Biegungen.
21. Die Developpabelen.
22. Die Isometrie und Biegung der Regelflächen.

23. Die Biegung der Rotationsflächen.
24. Isometrie mit Erhaltung der Krümmungslinien resp. Hauptkrümmungsradien.
25. Isometrie mit Erhaltung konjugierter Systeme.
26. Die Translationsflächen.
27. Die Minimalflächen.

2) Die Flächen konstanter Krümmung.

28. Die Flächen konstanter Krümmung.
29. Die Flächen konstanter negativer Krümmung.
30. Die Flächen konstanter positiver Krümmung.

3) Vollständige isometrische Gruppen.

31. *Weingarten*'s vollständige Flächenklassen.

D. Die infinitesimale Isometrie.

32. Infinitesimale Deformation und Isometrie der Flächen.
33. Das Problem der sphärischen Abbildung.
34. Isometrische Flächenpaare.

E. Geometrische und mechanische Modelle zur Lehre von der Abbildung und Abwickelung der Flächen.

35. Geometrische und mechanische Modelle.

Litteratur.

E. Beltrami, Ricerche di analisi applicata, Giorn. di mat. 2, p. 267, 297, 331, 355 (1864); 3, p. 15, 33, 82, 228, 311 (1865); Opere 1, Milano 1902, p. 107.

— Sulla teoria generale dei parametri differenziali, Bologna Mem. (2) 8, p. 549 (1868).

L. Bianchi, Lezioni di Geometria infinitesimale, Pisa 1894; deutsch von *M. Lukat,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, zitiert mit *Bianchi;* ed. 2, vol. 1, Pisa 1902.

O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 1.

— Mémoire sur la théorie des surfaces applicables à une surface donnée (1860), J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 209; deuxième partie cah. 42 (1867), p. 1.

E. Bour (1860), Théorie de la déformation des surfaces, J. éc. polyt. cah. 39 (1862), p. 1.

Ch. Brisse, Exposition analytique de la théorie des surfaces, Ann. éc. normale (2) 3 (1874), p. 87; J. éc. polyt. cah. 53 (1883), p. 213.

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, deutsch von *G. Kowalewski,* Leipzig 1901.

D. Codazzi (1859), Mémoire rélatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, Paris Mém. prés. par divers savants, 27, Nr. 6 (1872).

G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 4 Bde (1887—1896), zitiert mit *Darboux,* Leçons.

C. F. Gauss (1822), Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbil-

dung dem abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, Astronom. Abhandlungen von *H. Schumacher* 3, Altona 1825, Werke 4, p. 189; *Ostwald*'s Klassiker, Nr. 55.

C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Gott. Comm. rec. 6 (1828); Werke 4, p. 217; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 5; zitiert mit *Gauss,* disquisitiones.

— Untersuchungen über einige Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttinger Abhandl. 2 (1844); Werke 4, p. 259.

— Nachlass, Werke 8, p. 365—450; insbes. Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen (1825), p. 408.

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1892.

R. Hoppe, Prinzipien der Flächentheorie, Leipzig 1876; 2. Aufl. Leipzig 1890.

F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig, 1852; 3. Aufl. bearbeitet von *L. Natani,* 1890.

J. Knoblauch, Einführung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888.

J. L. Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Berlin Nouv. mém. 1779; Oeuvres compl. 4, p. 637 u. 665; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 55.

S. Lie und *G. Scheffers,* Vorlesungen über die Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896; zitiert mit *Lie-Scheffers* 1.

G. Monge, Applications de l'analyse à la géométrie, Paris 1795; 4. éd. Paris 1807; 5. éd. (par *J. Liouville*) Paris 1850; zitiert mit *Monge, applications.*

K. Peterson, Über Kurven und Flächen, Leipzig und Moskau 1868; zitiert mit *Peterson.*

A. Ribaucour (1876), Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes, J. de math. (4) 7 (1891), p. 1.

— Étude des élassoïdes, ou surfaces à courbure moyenne nulle, Bruxelles Mém. cour. in 4°, 44 (1882), p. 1.

G. Ricci, Lezioni sulla teoria delle superficie, Verona-Padova 1898; zitiert mit *Ricci.*

G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raum, Leipzig 1901; zitiert mit *Scheffers* 1.

— Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902; zitiert mit *Scheffers* 2.

H. Stahl und *V. Kommerell,* Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, Leipzig 1893; zitiert mit *Stahl-Kommerell.*

A. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881; zitiert mit *Tissot.*

A. Einleitung.

1. Vorbemerkungen. Es soll im folgenden der Versuch gemacht werden, eine *zusammenfassende Übersicht* über die Lehre von der Abbildung und Abwickelung der krummen Flächen auf einander zu geben. In der *geschichtlichen Entwickelung* dieser Probleme lassen sich folgende hinsichtlich ihres allgemeinen Charakters wohl unterschiedene *Perioden* bezeichnen.

Erste Periode. Die Zeit bis auf *Joh. I Bernoulli*'s (1698), *Jac. I Bernoulli*'s (1728), *A. Clairaut*'s (1731), *L. Euler*'s (1777), *J. L. Lagrange*'s (1779) und *G. Monge*'s (1785) Arbeiten: Behandlung einzelner Fragen der Abbildung und Abwickelung; erste Einführung der krummlinigen Koordinaten u, v.[1])

Zweite Periode. Das Erscheinen der *Gauss*'schen[2]) Preisarbeit über konforme Abbildung (1822) und die Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827), sowie die Arbeiten von *F. Minding* (von 1830 an), dann von *E. Bour*, *O. Bonnet* und *D. Codazzi* infolge der Preisaufgabe der Pariser Akademie für 1860 nebst *J. Weingarten*'s ersten Untersuchungen über die W-Flächen (1861, 1863).

Dritte Periode. *E. Beltrami*'s Lehre von den Differentialparametern[3]) (1864), die durch *B. Riemann*'s Habilitationsvorlesung (1854) angeregte Untersuchung der *Transformation der quadratischen Differentialausdrücke* und ihrer Invarianten (*E. B. Christoffel* (1869) und *R. Lipschitz* (1870)), sowie die sich daran schliessenden Arbeiten über Flächen konstanter Krümmung[4]).

Die *gegenwärtige Periode*, welche die *allgemeine Erledigung* der in

1) Über die von den genannten Mathematikern behandelten Probleme siehe die reichhaltigen Angaben von *P. Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 444, sowie Nr. **21**. Nach *Stäckel* (Bibliotheca math. (3) 2 (1901), p. 122) hat übrigens schon *Euler* 1766 (Opera postuma 1, Petropol. 1862, p. 494) unter Zugrundelegung der Parameter u, v und der Fundamentalgrössen erster Ordnung das allgemeine Problem der Abwickelung einer Fläche auf eine gegebene gestellt, ohne es allerdings weiter zu behandeln.

2) Wesentlich *neu* ist bei *Gauss* der *Begriff* und die *Eigenschaften* des *Krümmungsmasses* k, die *allgemeine* Verwendung der Parameter u, v insbesondere für die *Theorie der geodätischen Linien* (während *Lagrange* 1779 nur das kartographische Problem so behandelt hatte), endlich die Erkenntnis der *Fundamentalgrössen erster Ordnung* in ihrer Beziehung zu den *inneren* Eigenschaften der Flächen. Nach *Stäckel* (Leipz. Ber. 45, p. 455) hat bereits *O. Rodrigues* (Correspondance sur l'école polytechnique 3 (1815), p. 162) die Beziehung des Produktes der Hauptkrümmungsradien einer Fläche zur sphärischen Abbildung ihres Flächenelementes in einer speziellen Form gekannt. *F. Minding*, dem man auch die Einführung der *geodätischen Krümmung* (III D 3, Nr. **11**, **12**) und ihrer Invarianz verdankt, behandelt im *Gauss*'schen Sinne zuerst die Biegung gewisser Flächen.

3) *Beltrami*'s Differentialparameter (I B 2, Nr. **22**; III D 3, Nr. **8**) erster und zweiter Ordnung treten schon in *Minding*'s (1838) und *O. Bonnet*'s (1860) Arbeiten auf. *Riemann*'s Arbeit über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Werke, p. 254), ist erst 1868 (Göttinger Abh. 13) veröffentlicht; man vergleiche auch die Commentatio mathematica von 1861 (*Riemann*, Werke, p. 370 und Fussn. 150).

4) Wegen der mit diesen Untersuchungen in engster Beziehung stehenden Ausbildung der nicht-euklidischen Geometrie, die hier nicht berücksichtigt werden kann, vgl. man III A 1.

den früheren aufgeworfenen Fragen anstrebt, ist in geometrischer Hinsicht durch die Verwendung des Mannigfaltigkeitsbegriffs, der Theorie der Berührungstransformationen von *S. Lie* (seit 1870), der Strahlensysteme (beginnend mit *A. Ribaucour*'s Arbeiten 1870), in methodischer Beziehung durch die Einführung kinematischer Gesichtspunkte (*E. Laguerre* 1872, *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces vgl. III D 1, 2, Nr. **10**; III D 3, Nr. **10**) und die freieste Verwendung des allgemeinen Koordinatenbegriffs, sowie durch die Einführung der kovarianten Differentialprozesse (*G. Ricci*, seit 1888) gekennzeichnet.

Eine auch nur einigermassen *vollständige* Darlegung dieser letzteren auf den vereinigten Arbeiten der deutschen, französischen und italienischen Mathematiker beruhenden Periode kann schon wegen der ausserordentlichen Vielseitigkeit der in ihr zur Verwendung kommenden Gesichtspunkte hier nicht erwartet werden. Die Darstellung muss sich vielmehr mit der Hervorhebung einzelner besonders wichtig erscheinender Forschungsrichtungen begnügen, um so mehr, da sich dieselben gegenwärtig in lebhaftester Entwickelung befinden.

2. Allgemeine Übersicht über die Aufgaben der Abbildung und Abwickelung. Zwei Flächen F und F' heissen aufeinander abgebildet[5]), wenn jedem Punkte $P(xyz)$ von F ein Punkt $P'(x_1y_1z_1)$ von F' nach einem gewissen Gesetze eindeutig umkehrbar zugeordnet ist. Unter Beschränkung auf *stetige* Zuordnungen werden dabei, sobald es sich nicht nur um Untersuchungen aus dem Gebiet der *Analysis situs* (III A 4) handelt, xyz und $x_1y_1z_1$ in der Umgebung von P und P' als Funktionen der unabhängigen Parameter u, v mit stetigen partiellen Differentialquotienten nach diesen Variabeln in dem Umfange, wie dieselben gebraucht werden, oder auch wohl als (reguläre) analytische Funktionen der u, v vorausgesetzt. Desgleichen ist auch anzunehmen, dass von den drei Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & z \\ u & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z & x \\ u & v \end{pmatrix}$$

mindestens *eine* von Null verschieden ist.

Da jede Verwandtschaft durch Funktionen mit stetigen ersten Differentialquotienten im Unendlichkleinen *projektiv* ist[6]), so bilden

5) So *C. F. Gauss* 1822 in den Astronom. Abh. von *H. C. Schumacher*, 1825, p. 1.

6) Dies hat wohl zuerst allgemein *A. Tissot* bemerkt, sur les cartes géographiques, Paris, C. R. 49 (1859), p. 673; Nouvelles ann. de math. (2) 17, 1878, dann im Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881. Nach *Tissot* besteht die Zuordnung hinreichend kleiner korrespondierender Bereiche von P

die korrespondierenden Tangenten von P und P' projektive Büschel; da in zwei solchen *reellen* Büscheln *entweder* unendlich viele entsprechende Rechtwinkelpaare *oder* ein einziges enthalten sind (III A 5), hat man *Tissot*'s Satz, dass entweder einem *einzigen* Orthogonalsystem, den *Hauptkurven* von F, auch ein solches von F' entspricht, oder dass dies für *jedes* Orthogonalsystem auf F der Fall ist. Bezeichnet man die *Fundamentalgrössen erster Ordnung* (III D 1, 2, Nr. **34**) von F und F' durch E, F, G; E', F', G', [7]) so muss im letzteren Fall wegen der Orthogonalitätsbedingung der Kurvenelemente du, dv; $\delta u, \delta v$:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

die Bedingung

$$E : F : G = E' : F' : G'$$

bestehen, d. h. die Abbildung ist eine *konforme* (II B 1, Nr. **5**), die korrespondierenden Tangentenbüschel sind entweder direkt oder invers kongruent[8]).

Erst *Lie*[9]) bemerkte, dass *Tissot*'s Satz aus der Beziehung entspringt, in der die Bilder der *Minimal-* oder *Nullkurven* (III D 1, 2,

---

und P' in geeigneter ähnlicher Vergrösserung und senkrechter Projektion des einen auf das andere, vgl. z. B. *Scheffers* 2, p. 90. Der Satz selbst ist übrigens eine unmittelbare Folge von der vorausgesetzten *Existenz* der stetigen partiellen Differentialquotienten der Koordinaten nach den u, v, und in Bezug auf spezielle Fragen (Kreisverwandtschaft (III A 7)) schon von *Möbius* gekannt.

7) Die Differentialgleichung der Hauptkurven ist:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{vmatrix} = 0,$$

die Grösse $T = +\sqrt{EG - F^2}$ nach dem obigen stets von Null verschieden mit Ausnahme der Minimaldeveloppabelen (III D 5, Nrr. **15**, **29**, **30**, **40**) (siehe *Darboux,* Leçons 1, p. 148). Auch giebt es für jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre Richtungen, für die das Längenverhältnis $ds : ds'$ gleich Eins ist (*automekoische* oder *längentreue* Kurven, *Tissot,* p. 130; *Aequideformaten* bei *E. Hammer,* Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, Stuttgart 1889, p. 23.

8) Bis auf Grössen von höherer als erster Ordnung; vgl. *A. Voss,* Über konforme Abbildung, Math. Ann. 46 (1895), p. 133.

9) *S. Lie,* Math. Ann. 20 (1882), p. 419 Fussn. 1; in analytischer Darstellung bei *P. Stäckel,* Math. Ann. 44 (1894), p. 555. Die Bezeichnung *Minimalkurven* stammt von *Lie,* Math. Ann. 14 (1878), p. 337; sie wurden übrigens schon von *Bonnet* und *Bour* (1860), sodann namentlich von *A. Ribaucour,* seit 1870 beständig bei flächentheoretischen Untersuchungen angewandt (III D 4, Nr. **35**). — *Lie* hat überhaupt zuerst mit Nachdruck auf die allgemeine Bedeutung imaginärer Beziehungen in der Differentialgeometrie hingewiesen; vgl. indes *P. Stäckel,* Beiträge zur Flächentheorie, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 478, sowie *Scheffers* Lehrbücher 1, 2, welche zum ersten Male in *systematischer* Weise die imaginären Gebilde und die durch sie bedingten *Ausnahmefälle* berücksichtigen.

Nr. 12) von F zu denen der Nullkurven von F' stehen. Denn die Abbildung der *Involution* orthogonaler Tangentenpaare bei P liefert eine Involution bei P', deren Doppelelemente die Bilder der Tangenten der Minimalkurven von F sind. Und nun sind *drei* Fälle möglich. Fallen diese Doppelelemente *nicht* mit den Tangenten der Minimalkurven bei P' zusammen, so giebt es *ein* gemeinsames harmonisches Paar zu den Doppelelementen beider Involutionen bei P'; dieses bildet die Tangenten der *Tissot*'schen Hauptkurven. Entsprechen aber die Minimalkurven von F' denen von F, so fallen die Doppelelemente beider Involutionen zusammen; man hat die *konforme* Abbildung. Bei der reellen Abbildung reeller Flächen sind keine anderen Fälle möglich; bei imaginärer Beziehung können aber die beiden Involutionen bei P' auch in *einem* Doppelelement koinzidieren: das gemeinsame Orthogonalsystem reduziert sich dann auf dieses ausgeartete, auf sich selbst senkrechte System der Minimalkurven[10]).

Der Bedeutung der Differentialgleichung der Nullkurven auf F und F'

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,du^2 = 0$$
$$E'du^2 + 2F'du\,dv + G'du^2 = 0$$

zufolge verallgemeinert *Stäckel*[11]) *Lie*'s Betrachtung durch die Annahme von zwei *beliebigen* Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0 \\ &A_1du^2 + 2B_1du\,dv + C_1dv^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Jede derselben bestimmt, falls die Discriminanten der Formen (1) nicht verschwinden, ein Tangentenpaar von F' und F'. Entsprechen nun bei der Abbildung diese Paare sich nicht, so existiert für dieselbe ein, durch die *Jacobi*'sche Determinante der Formen bestimmtes, gemeinsames harmonisches Tangentenpaar, welches bei reellen Flächen und reeller Beziehung sicher reell ist, wenn nur eine der Formen *definit* ist (III D 3, Nr. 8). Wenn aber beide Tangenten eines Paares den beiden andern entsprechen ($A : B : C = A' : B' : C'$), so sind unendlich viele solcher Paare vorhanden; endlich ist auch noch der *Lie*'sche Fall möglich, dass nur eine Tangente des einen Paares einer des andern entspricht (die Gleichungen (1) haben einen gemeinsamen Faktor, dessen Quadrat die *Jacobi*'sche Form ist). Bedeuten daher jetzt L, M, N; L', M', N' die *Fundamentalgrössen zweiter Ordnung* von F und F' (III D 1, 2, Nr. 34), also die Gleichungen (1) die *Haupttangenten-*

10) Einige Autoren bezeichnen diese Beziehung als *halbkonforme* Abbildung.

11) *P. Stäckel*, Über Abbildungen, Math. Ann. 44 (1894), p. 556.

kurven (III D 1, 2, Nr. **35**; III D 3, Nr. **1**) der Flächen, so folgt der Satz von *K. Peterson*[12]), dass „im allgemeinen" bei jeder reellen Abbildung ein einziges gemeinsames, nach *Dupin* konjugiertes System *konjugierter* Kurven[13]) (III D 1, 2, Nr. **37**; III D 3, Nr. **3**, **37**) vorhanden ist, falls nicht beide Haupttangenten sich gegenseitig entsprechen[14]). Im letztern Falle heisst die Abbildung nach *Stäckel konjunktiv; jedem* konjugierten Systeme von F entspricht ein solches von F'.[15])

Ist der *Modulus* m der *konformen* Beziehung

$$(2) \qquad E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = m^2 (E' du^2 + 2F' du\, dv + G' dv^2)$$

konstant, so hat man eine *ähnliche* Abbildung; für $m = 1$ entsteht die direkt oder invers kongruente Zuordnung. Nach *Gauss* bezeichnet man den Fall $m = 1$ als eine *Abwickelung*[16]) (explicatio, application, applicazione). Allerdings lassen sich dann die Punkte von F so auf F' beziehen, dass die Winkel und Längengrössen der Figuren dabei erhalten bleiben. Von einer *Abwickelung* aber lässt sich streng genommen nur dann reden, wenn eine *stetige Biegungsdeformation*, wie z. B. bei den *„abwickelbaren"* Flächen (Nr. **21**) (*Developpabelen*, surfaces développables, superficie sviluppabile), *Rotationsflächen* (Nr. **23**), *Regel-* (Nr. **22**) und *Minimal*flächen (Nr. **27**) etc. bekannt ist, durch den jene Ausbreitung *realisiert* wird[17]). Da die Lehre von den *„auf einander*

---

12) *K. Peterson*, p. 37. Dies System heisst dort die *Basis* der Abbildung; später bei *A. Ribaucour*, Paris, C. R. 103 (1891), p. 324; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 120; verallgemeinert bei *A. Petot*, Sur les systèmes conjuguées et les couples de surfaces applicables, Paris, C. R. 115 (1892), p. 1250. Vgl. auch Nr. **25**.

13) *Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 44, 91.

14) Der Ausnahmefall ist hier nicht berücksichtigt, vgl. *Scheffers* 2, p. 286. Das System ist sicher *reell*, wenn eine der Flächen *positiv* gekrümmt ist.

15) *P. Stäckel*, Math. Ann. 34 (1889), p. 538; *Peterson*, p. 40, nennt die Beziehung $L : M : N = L' : M' : N'$ *Konjunktion*. Zwei *konform und konjunktiv* auf einander bezogene Flächen *sind nach Stäckel* im allgemeinen *ähnlich*, falls sie nicht einer bestimmten Klasse von Flächen angehören (*Stäckel*, Math. Ann. 44 (1896), p. 560; Leipz. Ber. 48 (1896), p. 489. Zu derselben gehören ausser der Kugel und den Minimalflächen (III D 5, Nr. **19** ff.) noch gewisse C-Flächen, so z. B. diejenigen, die durch ihre *Haupttangentenkurven in Rhomben mit konstantem* von $\pi/2$ *verschiedenem* Winkel geteilt werden (III D 5, Nr. **38**); es sind dies nach *Stäckel* (Leipz. Ber. 50 (1898), p. 10) *Rotationsflächen*, die ∞^3 konform konjunktive Abbildungen in sich gestatten (Leipz. Ber. 48, p. 497).

16) Das Wort „explicare" in dieser Bedeutung schon bei *L. Euler*, de solidis, quorum superficiem in planum *explicare* licet, Petrop. Nov. Comm. 16 (1772), p. 3.

17) Schon *Peterson* (p. 42) spricht nicht von einer Abwickelung oder Biegung der Flächen, sondern definiert *Biegung* als Zuordnung mit Erhaltung der Längenelemente. Angemessener ist es vielleicht, diesen Ausdruck auf die von *Biegungs-*

abwickelbaren Flächen" zunächst sich mit *dieser* Frage *nicht* beschäftigt, soll der Fall $m = 1$ als *Isometrie der beiden Flächen*, und zwei „auf einander abwickelbare" Flächen (surfaces applicables) als *zu einander isometrische*, kurz als *isometrische Flächen*[18]) bezeichnet, der Fall einer kontinuierlichen von *Biegungsparametern* abhängigen isometrischen Deformation aber *Biegung* genannt werden. — Übrigens lässt sich jede Fläche auf jeder zu ihr isometrischen durch „rollende" Bewegung „abwälzen", d. h. durch ein gleichsam *typographisches Verfahren* auf dieselbe „übertragen".

Alle Flächen mit *demselben*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

bilden eine *vollständige Gruppe* (nach *Weingarten* Klasse) *isometrischer Flächen* (Nr. **31**). Das wesentlich durch *Gauss'* Disquisitiones angeregte Problem der *„biegsamen unausdehnsamen Flächen"* ist allerdings schon früher auf dem Boden der *Mechanik* erwachsen[19]). Eine *rein geometrische Basis* erhält die Isometrie aber erst durch den *Gauss'*schen Begriff[20]) der nur von den E, F, G abhängigen *inneren*[20a]) (intrinsequen) Eigenschaften der Flächen. Ihnen stehen die *äusseren* (extrinsequen), d. h. bis auf die absolute Lage im Raume bestimmten gegenüber, welche nach *Bonnet's* Satz[20b]) über die durch die Fundamentalgrössen erster *und* zweiter Ordnung vermittelte bis auf Kongruenz und Symmetrie eindeutige Bestimmung einer Fläche (III D 1, 2, Nr. **34**) in den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N ihren Ausdruck finden.

Die konforme Beziehung kann man übrigens durch die Forderung

(3) $A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2 = A' du'^2 + 2B' du'\, dv' + C' dv'^2$

verallgemeinern, in der A, B, C irgend welche aus den u, v; E, F, G;

---

parametern stetig abhängenden Zuordnungen zu beschränken; ähnlich auch neuerdings *Bianchi*, p. 180; *Scheffers* 2, p. 274.

18) So *A. Voss*, Münch. Ber. 1892, p. 247; Math. Ann. 46 (1896), p. 97. *A. Pellet* (Paris, C. R. 124 (1897), p. 1337) nennt isometrische Flächen allerdings solche, deren Krümmungslinien ein „isometrisches" (dasselbe ist eine Verallgemeinerung des isothermen (III D 3, Nr. **19**)) System bilden.

19) *P. Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 455.

20) *Gauss*, Disquisitiones art. 13.

20a) Es handelt sich übrigens hier nur um die „inneren" Eigenschaften in Rücksicht auf die Isometrie, nicht um solche im Sinne der Analysis situs (III A 4); vgl. *F. Klein*, Über den Zusammenhang der Flächen, Math. Ann. 8 (1876), p. 478; *W. Dyck*, Beiträge zur Analysis situs, Math. Ann. 32 (1888), p. 474.

20b) Nach *Stäckel* (Biblioth. math. (3) 2, p. 124) findet sich dieser wichtige Satz schon 1853 in einer nicht veröffentlichten Arbeit von *K. Peterson*.

L, M, N und deren Derivierten gebildete Formen, insbesondere Differentialinvarianten (II A 6, Nr. **13**) einer bestimmten Gruppe von Transformationen, A', B', C' die entsprechend gebildeten für F' sind. Von diesen allgemeinen Abbildungen sind ausser den oben erwähnten konjunktiven und den *äquivalenten* oder *flächentreuen* (Nr. **6**):

$$T du\, dv = k T' du' dv',$$

bisher erst wenige untersucht; selbstverständlich lassen sich diese Fragen auf beliebige *höhere* Differentialformen (I B 2, Nr. **22**, Anm. 347), insbesondere auch auf das Entsprechen einfacher oder mehrfacher Scharen von durch Differentialgleichungen definierten Kurvensystemen (so z. B. die geodätischen Abbildungen Nr. **9**) erweitern. Andere Abbildungsprinzipe werden dadurch gewonnen, dass man die Normalen, Tangenten etc. von Kurvensystemen auf F und F' einander zuordnet. Eine besonders fruchtbare Quelle für dieselben liegt aber in der durch *A. Ribaucour* 1870 begonnenen, namentlich von *C. Guichard*, *E. Cosserat* und *L. Bianchi* fortgesetzten Betrachtung der *Strahlensysteme*, welche von den Verbindungslinien der Punkte P, P' gebildet werden, und deren Beziehungen zu den Flächen F, F' (Nr. **13**; III D 5, Nr. **30**).

Es sollen im folgenden zuerst die *Hauptprobleme der Abbildung*, dann die der *Isometrie* dargelegt werden. Bei manchen derselben hat man übrigens *zwei* Probleme, A und B, zu unterscheiden. A besteht in der Bestimmung solcher (analytischer) Funktionen der Koordinaten, durch welche die vorgeschriebene Zuordnung bewirkt wird. Enthält die allgemeine Lösung von A willkürliche Funktionen, so besteht das Problem B in der Zuordnung *berandeter* Flächenstücke F und F', wobei noch *Ausnahmestellen* im Innern oder auf dem Rande, oder auch für den letzteren weitergehende *Randbedingungen* vorgeschrieben sein können. B ist naturgemäss funktionentheoretischer Art (II B 1, Nr. **5**) und kann hier nur in seinem *unmittelbaren* Zusammenhang mit der Infinitesimalgeometrie kurz erwähnt werden.

B. Die Abbildung der Flächen.

3. Die konforme Abbildung (III D 3, Nr. **19**). Man bezeichnet die *konforme*[21]) Abbildung $E : F : G = E' : F' : G'$, welche in der Proportionalität der korrespondierenden Längenelemente $ds = m ds'$ und der *daraus* vermöge der Formel für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Richtungen d, δ

21) Bezeichnung von *Gauss* in den Untersuchungen über Gegenstände d. höheren Geodäsie, Gött. Abh. 1844 = Werke 4, p. 262, auch Gött. gel. Anz. 1843 = Werke 4, p. 348.

$$ds\,\delta s\cos\theta = E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v$$

folgenden Erhaltung der Winkel[22]) zwischen ds, δs besteht, auch als *winkeltreue*[22]) oder in den kleinsten Teilen ähnliche[23]), geographische[24]) oder graphische[25]), isogonale[26]) (isogonische), autogonale[27]), orthomorphische (orthomorphic projection)[28]), etc.

Da zwei auf ein und dieselbe dritte konform bezogene Flächen auch zu einander konform sind, kommt das Problem für zwei beliebige Flächen auf das der konformen Abbildung einer Fläche auf die *Ebene* zurück[29]).

Aber auch hier genügt die Kenntnis einer *einzigen* Abbildung in Verbindung mit allen konformen Abbildungen der Ebene auf eine andere Ebene. Nach *Gauss*[30]) und *Jacobi*[31]) zerfällt die Aufgabe, *alle* konformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene zu finden, in die zwei folgenden. Da nämlich jedes Isothermensystem (III D 3, Nr. **19**) bei der konformen Abbildung isotherm bleibt, so hat man *zunächst* irgend eine Transformation zu bestimmen, welche

$$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 = \lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2) = \lambda_1^2 d\alpha_1 d\beta_1$$

bewirkt, wobei unter u_1, v_1 rechtwinklige Koordinaten der Ebene verstanden werden, d. h. irgend einen der beiden komplex konjugierten integrierenden Faktoren $\varkappa, \varkappa_1$, der beiden Differentialausdrücke (III D 3, Nr. **19**)

---

22) So *A. Breusing* (zweiter deutscher Geographentag, Halle 1882).

23) *Gauss*, Werke 4, p. 194.

24) Tracé géographique, so *J. Liouville*, p. 601 Note V in den Applications von *Monge*; so namentlich die italienischen Mathematiker, wohl mit *Darboux*, Leçons 1, p. 153 zur *Unterscheidung* von dem funktionentheoretischen Problem der représentation conforme (II B 1, Nrr. **5**, **18**).

25) *Peterson*, p. 41.

26) *F. Siebeck*, J. f. Math. 54 (1858), p. 221.

27) *Tissot*, p. 75.

28) *A. Cayley*, J. f. Math. 107 (1892), p. 262 und manche englische Mathematiker.

29) Diese Reduktion findet bei allen ähnlichen Fragen, z. B. der äquivalenten Abbildung etc. statt.

30) *Gauss*, Werke 4, p. 196; 8, p. 370. Wahrscheinlich hat *Gauss* die *allgemeine* Aufgabe der konformen Abbildung schon vor 1816 gestellt. Auch hier zeigt sich, wie *Gauss* in charakteristischer Weise (ebenso wie *d'Alembert, Lagrange, Laplace*) seine allgemeinen Untersuchungen an Fragen anknüpfte, die eine unmittelbare *praktische Verwendung* gestatten.

31) *C. G. J. Jacobi*, Berl. Monatsber. 1849 = Werke 2, p. 62; J. f. Math. 59 (1861), p. 74 = Werke 2, p. 401. Die Einführung der komplexen Grössen indes schon bei *Lagrange*, Berlin, Nouveaux mém. 1779 = Oeuvres compl. 4, p. 643.

$$d\alpha_1 = \varkappa\left(\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv\right)$$
$$d\beta_1 = \varkappa_1\left(\sqrt{E}du + \frac{F-iT}{\sqrt{E}}dv\right)$$

zu suchen, *sodann* aber alle Lösungen der Gleichungen:

$$\lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2) = \lambda_1^2 d\alpha_1 d\beta_1 = \lambda_2^2 d\alpha_2 d\beta_2 = \lambda_2^2(du_2^2 + dv_2^2)$$

zu bestimmen. Dies geschieht durch die Gleichungen[32]):

$$\alpha_2 = F(\alpha_1), \qquad \beta_2 = F_1(\beta_1),$$

in denen man rechter Hand auch α und β noch vertauschen kann. Die allgemeine Lösung wird daher gegeben durch:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_2 + iv_2 = F(u_1 + iv_1), \\ u_2 - iv_2 = F_1(u_1 - iv_1), \end{cases}$$

wobei F und F_1 willkürliche Funktionen ihrer komplexen Argumente sind, übrigens rechtsstehend i durch $-i$ ersetzt werden darf. Für den Fall reeller Transformation müssen dann F und F_1 komplex konjugierte Funktionen ihres Argumentes sein. Der Multiplikator

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{\varkappa\varkappa_1}$$

genügt dabei der *Beltrami*'schen Differentialgleichung[33]) (III D 3, Nr. **19**):

$$\Delta_2(\log\lambda) = -k,$$

wobei unter k das Krümmungsmass der Fläche verstanden wird.

Nimmt man in (1) F und F_1 als komplex konjugierte Funktionen, so wird:

$$u_2 = \quad \Re F(u_1 + iv_1), \text{ [33a])}$$
$$v_2 = -\Re iF(u_1 + iv_1),$$

und jede dieser Funktionen genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 0.$$

Nach *Beltrami* ergeben sich alle konformen Abbildungen auf die Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u_1, v_1 vermöge der partiellen Differentialgleichung:

---

32) So *J. Liouville,* J. de math. 11 (1846), p. 362, auch Note II der Applications von *Monge,* p. 573; vgl. auch *Darboux,* Leçons 1, p. 148. Das im Texte gewählte Zeichen entspricht der *direkten* Ähnlichkeit.

33) *E. Beltrami,* Giorn. di mat. 2 (1864); Math. Ann. 1 (1869), p. 579; vgl. *J. Knoblauch,* Flächentheorie, p. 175; *R. Lipschitz,* Bull. sci. math. (2) 16 (1892), p. 207. Über die *Beziehung zwischen den Krümmungsmassen* konform aufeinander abgebildeter Flächen vgl. *G. Souslow,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 30.

33a) $\Re$ bedeutet den reellen Bestandteil des betreffenden Ausdruckes.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial u_1}{\partial u} - F\frac{\partial u_1}{\partial v}}{T}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial u_1}{\partial v} - F\frac{\partial u_1}{\partial u}}{T}\right) = 0.$$

Denn in der That wird für jede *reelle* Lösung derselben, falls

$$T\frac{\partial v_1}{\partial u} = -\left(E\frac{\partial u_1}{\partial v} - F\frac{\partial u_1}{\partial u}\right),$$

$$T\frac{\partial v_1}{\partial v} = \left(G\frac{\partial u_1}{\partial u} - F\frac{\partial u_1}{\partial v}\right),$$

$$\frac{E\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2}{T^2} = \frac{E\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2}{T^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$$

gesetzt wird,

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = \lambda_1^2(du_1^2 + dv_1^2).$$ [33b])

4. Besondere konforme Abbildungen. Die konforme Eigenschaft der *stereographischen* Abbildung der *Kugel*[34]) und der *Merkator*'schen Projektion[35]) ist seit langer Zeit bekannt (VI 4).

Lambert[36]) leitete zuerst diese und andere konforme Abbildungen aus der Forderung der Erhaltung der Winkel, d. h. der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen her. *Lagrange*[37]) gab die allgemeine konforme Abbildung der *Rotationsflächen*. Aber erst bei *Gauss* findet sich die bei *Lagrange*[37a]) nur angedeutete konforme Abbildung *beliebiger* Flächen, verbunden mit der Erkenntnis, dass das Problem *nur* von der Proportionalität der Fundamentalgrössen *erster* Ordnung abhängt.

Das schon von *Lagrange* gelöste Problem der konformen Transformationen der Ebene, bei denen Kreise in Kreise übergehen[38]), löst

---

33b) Vgl. z. B. *Bianchi*, p. 69.

34) Die Erhaltung der Kreise bei der stereographischen Projektion der Kugel (diese Bezeichnung zuerst bei *Fr. Aguillon*, opticorum libri 6, Antwerpen 1613) kannte schon *Hipparch*; die daraus folgende Erhaltung der Winkel scheint (nach *Lagrange*, Oeuvres compl. 4, p. 639) später wieder in Vergessenheit geraten zu sein.

35) *G. Kremer*, 1512—1594 (genannt *Merkator*, der deutsche Geograph, *A. Breusing*, Duisburg 1869), vollendete 1569 die erste nach seiner Methode entworfene Weltkarte.

36) *J. H. Lambert*, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendungen, Berlin 3 (1772), p. 185—199; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 54.

37) *J. L. Lagrange*, Oeuvres compl. 4, p. 637; second mém. daselbst p. 665. *Lagrange* zeigt, dass die Aufgabe völlig bestimmt ist, wenn das Bild *eines* Meridians punktweise vorgeschriebene Gestalt in der Ebene haben soll (Erste Lösung eines Problems *B*), p. 647.

37a) *Lagrange*, Oeuvr. compl. 4, p. 665.

38) Vgl. *Darboux*, Leçons 1, p. 167.

Lie[39]) auf synthetischem Wege, davon ausgehend, dass Translationen T, Ähnlichkeitstransformationen (Rotationen) A und Transformationen durch reziproke Radien R konforme Transformationen sind, welche Kreise in Kreise überführen. Eine *jede* konforme[40]) Transformation C der Ebene, welche Kreise in Kreise verwandelt, kann symbolisch durch

$$C = RART$$

ausgedrückt werden. Hiernach giebt es ∞^6 konforme Transformationen dieser Art, deren analytischer Ausdruck nach *Lagrange*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit drei komplexen Konstanten ist.

Von der Mühll[41]) hat *Lagrange*'s Untersuchungen in der Art weiter geführt, dass auch Abbildungen betrachtet werden, bei denen parallele Geraden in *Kegelschnitte* übergehen. Die von *Gauss* nur besprochene Abbildung der Mittelpunktsflächen zweiten Grades erledigte *Jacobi*[42]) durch die Einführung der elliptischen Koordinaten; das bei *Jacobi* nicht behandelte Paraboloid ist von *Hoppe*[43]) hinzugefügt (III C 4).

Die konforme Abbildung von Ebenen auf Ebenen, grösstenteils unter Beschränkung auf Problem A vermöge der Beziehung zwischen den komplexen Variabeln z, z' der beiden Ebenen sind nach *Siebeck*'s Vorgange[44]) ausführlich durch *Holzmüller*[45]) dargelegt worden.

In Betreff des Problems B der konformen Abbildung sei hier

---

39) *Lie-Scheffers* 1, p. 6 und 415. Vgl. die historischen Bemerkungen daselbst, p. 423 über das *Prinzip der reziproken Radien* (III C 7) und dessen Verwendung für geometrische Zwecke seit *G. Bellavitis* (1836).

40) Nach *Lie* (*Lie-Scheffers* 1, p. 416) ist übrigens *jede* Punkttransformation der Ebene, welche Kreise in Kreise verwandelt, auch *konform*, vgl. auch p. 422.

41) *K. v. d. Mühll,* Über Abbildung von Ebenen auf Ebenen, J. f. Math. 69 (1868), p. 264. Konforme Abbildungen, bei denen Kurven einer gegebenen Schar in Kurven mit konstanter Längenvergrösserung übergehen, bestimmt *P. Pizzetti,* Roma Lincei Rend. (4) 1, p. 599 u. 628.

42) *C. G. J. Jacobi,* Berl. Monatsber. 1839, p. 64; J. f. Math. 19 (1839); p. 311; vgl. die vor der Veröffentlichung von *Jacobi*'s Arbeit, J. f. Math. 59 (1861) p. 74, entstandene Preisschrift von *E. Schering,* Über die konforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene, Göttingen 1858.

43) *R. Hoppe,* Math. Ann. 2 (1869), p. 504.

44) *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 55 (1858), p. 221; 57 (1860), p. 359; 59, (1861), p. 173.

45) *G. Holzmüller,* Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, Leipzig 1892; daselbst auch reichhaltige Litteratur; über letztere vgl. auch *H. Amstein,* Diss. Zürich 1872.

nur *Riemann*'s[46]) grundlegender Satz erwähnt: Jedes ebene einfach zusammenhängende Flächenstück F kann nur auf *eine* Art konform so auf eine Kreisfläche K abgebildet werden, dass ein Punkt im Innern von F dem Mittelpunkt von K und ein Randpunkt von F einem Randpunkt von K entsprechen soll; hinsichtlich der weiteren funktionentheoretischen Untersuchungen ist auf II B 1, Nr. 5, p. 19—23 zu verweisen.

5. Vorteilhafteste konforme Abbildung. Schon *Gauss*[47]) stellte sich 1843 die Frage nach möglichst vorteilhaften konformen Abbildungen. Er definiert sie für die Abbildung der Kugel resp. des Sphäroids auf die Ebene dadurch, dass der Ähnlichkeitsmodul m für die gegebene Breite λ_0 gleich Eins, für benachbarte λ aber zu $(\lambda - \lambda_0)^3$ proportional werden soll, und hat die betreffenden Formeln völlig ausgeführt.

H. Weber[48]) definiert als *Fehler* des Ortes auf der ebenen Fläche bei der Abbildung eines beliebigen Flächenstücks den Quotienten

$$\log\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

beim Fortschreiten auf irgend einer vom Punkte O ausgehenden Kurve und gelangt so zu dem Begriffe des *Gesamtfehlers* F vermöge der Gleichung:

$$F\int d\omega = \int d\omega \log\left(\frac{m}{m_0}\right)^2,$$

46) *B. Riemann,* Diss. Göttingen 1851 = Werke (1876), p. 40. Erste Durchführung für die Abbildung des Quadrats und Dreiecks, der Ellipse etc. auf den Kreis bei *H. A. Schwarz,* 1864; Über einige Abbildungsaufgaben, J. f. Math. 70 (1869), p. 105 = Ges. Abh. 2, p. 65; des allgemeinen *Polygons* bei *E. B. Christoffel,* sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 89; vgl. *Darboux,* Leçons 1, p. 176; von durch *Kreisbogen* begrenzten Polygonen bei *Schwarz,* J. f. Math. 70, p. 115, von durch *algebraische Kurven* begrenzten Flächenstücken durch *F. Lindemann,* Münch. Ber. 1894, p. 403; insbesondere für von Bogen *konfokaler Kegelschnitte* begrenzte Polygone, derselbe, Münch. Ber. 1895, p. 219; 1896, p. 401; endlich *A. Göttler,* konforme Abbildung eines von konzentrischen gleichseitigen Kegelschnitten oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes, Diss. München 1897; *N. Perry,* Das Problem der konformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung $3n$, Diss. München 1901; sodann Münch. Ber. 1902, p. 43.

47) *Gauss,* Gött. Abh. 1844 = Werke 4, p. 261; vgl. indess Werke 4, p. 209. Bei *Lagrange,* Oeuvres compl. 4, p. 637 werden diese Fragen nur ganz allgemein berührt. Vgl. auch *P. Tschebyscheff,* Oeuvres 1, p. 233 f. (1856); *A. A. Markoff,* Über die günstigste Abbildung eines Teils einer Rotationsoberfläche auf die Ebene, Petersb. Bull. 52 (1895), p. 77; Referat von *M. Sintzow* in den Fortschritten der Math. 26, p. 772, Berlin 1898.

48) *H. Weber,* Über ein Prinzip der Abbildung der Teile der Erdoberfläche, J. f. Math. 67 (1867), p. 229.

wo $d\omega$ das Flächenelement bedeutet; die Abbildung ist *eindeutig* bestimmt, wenn F ein *Minimum* werden soll und die Bilder zweier Orte gegeben sind, aber die Lösung dieses Problems hängt von der einer linearen partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung ab.

Eisenlohr[49]) definiert als Fehler an einer Stelle den Maximalbetrag der geodätischen Krümmung (III D 3, Nr. **12**) der Abbildung der geodätischen Linien der Fläche; das ähnlich wie bei *Weber* konstruierte Fehlerintegral führt auf ein *einfacheres* Minimumproblem, dessen unmittelbare Verwendung für praktische Fragen bisher nicht völlig durchgeführt ist.

6. Konforme Abbildungen bei mehr Dimensionen. Die konformen Punkttransformationen des *euklidischen Raumes von n Dimensionen* werden allgemein durch die Gleichung

$$\sum dx_i^2 = \varrho \sum dX_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ausgedrückt. *Liouville*[50]) bewies zuerst analytisch den wichtigen Satz, (vgl. III D 1, 2, Nr. **24**) dass für $n = 3$ alle konformen Transformationen in der Ähnlichkeit (Spiegelung) und der Abbildung durch reziproke Radii vectores bestehen. Synthetische Untersuchungen über diesen Satz sind erst später entstanden[51]).

Lie[52]) bestimmte schon 1871 nach synthetischen Gesichtspunkten

---

49) *A. Eisenlohr,* J. f. Math. 72 (1876), p. 143; vgl. auch Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 10, p. 305 und *E. B. Christoffel,* Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben, J. f. Math. 64 (1864), p. 193.

50) *Liouville,* J. de math. 12 (1847), p. 265, dann Note VI der Applications von *Monge,* Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique, ib. p. 609. Analytische Beweise für die bereits von *Liouville* vermutete Ausdehnung des Satzes auf n Variabele bei *R. Beez,* Ztschr. Math. Physik 20 (1875), p. 252 und *Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 7 (1878), p. 282.

51) Die synthetischen Beweise für $n = 3$ von *L. Bianchi* Giorn. di mat. 17 (1879), p. 40, und *A. Capelli,* Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio, Ann. di mat. (2) 1 (1885), p. 227, der wie *Lie* (Nr. 4) schon die allgemeine Transformation aus spezielleren zusammensetzt, beruhen zum Teil noch auf beschränkenden Voraussetzungen; vgl. auch *E. Goursat,* sur les substitutions régulières de l'espace, Ann. éc. Norm. (3) 6 (1889), p. 1. Bei *A. Giacomini* (Giorn. di mat. (2) 4 (1897)), p. 125 wird der Satz auf das *Dupin'sche* Theorem (III D 6b) zurückgeführt.

52) *Lie,* Gött. Nachrichten 1871, p. 191 u. 535. Vgl. *F. Klein,* Einleitung in die höhere Geometrie, autograph. Vorlesungen, Göttingen 1892/93, p. 378 ff.; desgl. *Darboux's* Darstellung, sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions, Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 34. Auf die allgemeine invariantentheoretische Behandlung (I B 2, Nr. **22**) der Transformation der Differen-

alle konformen Punkttransformationen der n-fachen Mannigfaltigkeit. Eine vollständige synthetische Ausführung für $n = 3$ findet sich in seiner Geometrie der Berührungstransformationen p. 419; man vergleiche die in Nr. 4 gegebene symbolische Formel $C = RART$, welche den *Liouville'schen* Satz für $n = 3$ enthält.

Es sei hier überhaupt auf die Bedeutung der Berührungstransformationen für ähnliche Probleme der Geometrie, wie z. B. das der Krümmungslinien in Haupttangentenkurven, etc. verwiesen[53]) (III D 8).

7. Äquivalente oder flächentreue Abbildungen. Zwei Flächen sind *äquivalent* oder *flächentreu*[54]) auf einander abgebildet, wenn die Inhalte korrespondirender Flächenstücke in konstantem Verhältnisse stehen (dasselbe kann übrigens ohne Beschränkung [durch Ähnlichlichkeitstransformation] gleich Eins angenommen werden); d. h. wenn die Parameter u', v' der Fläche F' solche Funktionen der Parameter u, v sind, dass die Gleichung

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{T}{T'}$$

erfüllt ist[55]).

Das Problem kommt auch hier auf das der Abbildung einer Fläche auf die Ebene zurück. Man hat daher *erstens* die rechtwinkligen Koordinaten x, y der Ebene so von den Parametern u, v der Fläche abhängig zu machen, dass

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = T \tag{1}$$

wird, und *zweitens* alle äquivalenten Abbildungen der Ebene x, y auf eine zweite mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v vermöge der Gleichung:

---

tialausdrücke nach *E. B. Christoffel* (J. f. Math. 70 (1869), p. 46) wird die Frage von *E. Cotton*, Paris, C. R. 125 (1896), p. 225 u. 127 (1898), p. 349 zurückgeführt.

53) Vgl. namentlich die Darstellung bei *Darboux*, Leçons 2, p. 219, 314 ff.; 4, p. 172 ff.; *Lie-Scheffers*, p. 649 ff.

54) Bezeichnung von *A. Breusing* und *E. Hammer*; représentation authalique bei *Tissot*, p. 75, isomer bei *Lambert* 1772. *M. Fiorini*, le projezioni delle carte geografiche, Bologna 1881; le projezioni quantitative ed equivalenti nella cartografia, Rom 1887 unterscheidet noch die quantitativen Abbildungen von den äquivalenten, bei denen der Modul gleich Eins ist.

55) *Lambert* behandelt bereits mehrere flächentreue Abbildungen, Beiträge (Fussn. 64), p. 181. Neuere Arbeiten von *Fr. Schellhammer*, Zeitschr. Math. Physik 23 (1878), p. 68; *A. Korkine*, sur les cartes géographiques, Math. Ann. 35 (1889), p. 588; vgl. das Referat von *F. August*, Fortschritte d. Math. 22, p. 830; *E. Holländer*, Diss. Halle 1891, auch Programm Gymn. Mühlheim a. Ruhr, Nr. 447 (1891).

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \tag{2}$$

zu suchen. Während nun die Gleichung (1) naturgemäss auf grössere Schwierigkeiten führt (in einfacher Weise gelingt die Lösung z. B. für diejenigen Flächen, bei denen T von der Form $U \cdot V$ ist[56]), lässt sich die Gleichung (2) nach *Gravé*[57]) vollständig durch die nach x und y aufzulösenden Relationen

$$v = \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

in denen Ω irgend eine Funktion von u, x bedeutet, für die

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial x}$$

nicht Null ist, resp. in dem hierdurch nicht berücksichtigten Ausnahmefall, wo den Geraden $u = \text{const.}$ die Geraden $x = \text{const.}$ entsprechen, durch

$$x = \varphi(u)$$
$$y = v : \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \psi(u)$$

lösen, wobei φ, ψ willkürliche Funktionen von u sind.

Andere hierher gehörige Probleme entstehen durch die Verbindung mit dem *Tissot*'schen Satze (Nr. 2). Man kann z. B. verlangen, dass dem System der *Tissot*'schen Hauptkurven der einen Ebene (Nr. 2) ein orthogonales System von vorgeschriebenem Charakter entspreche. Ist das letztere insbesondere von den Parallelen zu den Axen eines rechtwinkligen Systemes x, y gebildet, so hat man das System der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

d. h. *Tissot*'s Problem der *rektangulären Abbildung*. Zur Bestimmung von y ergiebt sich, wenn die Differentialquotienten nach u, v durch p, q, r, s, t bezeichnet werden, durch Elimination von x die Gleichung:

$$(p^2 - q^2)(r - t) + 4pqs = 0,$$

die durch Berührungstransformation auf die *Laplace*'sche Gleichung[58])

56) *E. Holländer*, Diss., p. 6 (Fussn. 55).

57) *D. A. Gravé*, sur la construction des cartes géographiques, J. de Math. (5) 1 (1896), p. 317; vgl. auch *Scheffers* 1, p. 123. Siehe indes die Notiz bei *Gauss*, Werke 8, p. 373.

58) *P. G. Laplace*, Paris Hist., année 1773, p. 341.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = z$$

reduziert wird[59]). In ganz allgemeiner Weise giebt *Darboux*[60]) mit Hilfe der Differentialparameter die partielle Differentialgleichung, vermöge der eine gegebene Fläche in der soeben bezeichneten Weise äquivalent auf die Ebene abgebildet wird.

In Analogie zu den Untersuchungen *Lagrange*'s bestimmt *Gravé*[61]) alle äquivalenten Abbildungen, bei denen ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem der Ebene in Systeme von *Kreisen* (Geraden) übergeht.

Untersuchungen über flächentreue Abbildungen bei vorgeschriebener Begrenzung (Problem *B*) finden sich bereits bei *Schellhammer*[62]) (Abbildung des Polygons auf ein Dreieck, schliesslich auch beliebiger Konturen auf den Kreis).

Flächentreue Abbildungen im *Raume* haben nur einen sehr beschränkten Charakter; sie reduzieren sich auf die Ähnlichkeit[63]).

8. Die Kartenkonstruktionen. Die Konstruktion geographischer Karten auf Grund der in den Nr. **3**—**7** besprochenen Abbildungsarten kann hier nur im allgemeinen behandelt werden[64]) (VI 4).

---

59) *Holländer,* Diss. p. 14; zu derselben Gleichung gelangt auch *A. Korkine* (Fussn. 55). Über die Lösung der *Laplace*'schen Gleichung vgl. *S. D. Poisson,* Théorie de la chaleur, 1835, p. 146; desgl. J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 215, sowie die umfassende Darstellung bei *Darboux,* Leçons 2, p. 23 ff. (II A 5, Nr. **53**).

60) *Darboux,* Leçons 3, p. 206. Der spezielle Fall der Abbildung der *Kugel* in seiner Beziehung zu den Flächen konstanter Krümmung ist von *L. Bianchi,* sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano, Roma Lincei Rend. (4) 6 (1890), p. 226 durchgeführt.

61) *D. A. Gravé,* J. de math. (5) 1 (1896), p. 317; es ergeben sich dabei elf, im wesentlichen sechs verschiedene Typen (p. 359).

62) *Schellhammer,* a. a. O. (Fussn. 55), p. 81.

63) *A. Razzaboni,* Sulle rappresentazioni dello spazio sopra se stesso che conservano le aree delle superficie correspondenti, Bologna Rend. 1889/90, p. 21; über Flächen, die mit parallelen Tangentenebenen flächentreu aufeinander bezogen sind, siehe *C. Guichard,* Par. C. R. 136 (1903), p. 151.

64) Die Theorie der Abbildung und Abwickelung der Flächen hat sich überhaupt aus dem geographischen Problem entwickelt und hat auch bis in die neueste Zeit immer wieder an dasselbe angeknüpft. Zur Litteratur vergleiche man: *J. H. Lambert,* Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, 3, Berlin 1772; *Lagrange,* sur la construction des cartes géographiques, Oeuvres compl. 4; *A. Tissot,* Mémoire sur la représentation des surfaces, Paris 1881, deutsche Bearbeitung von *E. Hammer,* Stuttgart 1887; *A. Germain,* traité des cartes géographiques, Paris 1866; *Th. Craig,* A treatise on projection, Washington 1882; *K. Zöppritz,* Leitfaden der Kartenentwurfslehre, Leipzig 1884, 2. Auflage von *A. Bludau,* Leipzig 1899; *E. Hammer,* Über die geographisch wichtigsten Karten-

Betrachtet man als wesentlichste *Elemente* einer auf die *Ebene* abzubildenden Fläche die Winkel, Flächen und Längengrössen der auf ihr gezeichneten Figuren, so wird man derjenigen Darstellung den Vorzug geben, welche die wahren Verhältnisse derselben in einem gewissen gegebenen Bereiche am genauesten wiedergiebt.

Bei der *winkeltreuen* Abbildung findet zwar infinitesimale Ähnlichkeit statt, die endlichen Längen- und Flächengrössen werden aber sehr erhebliche Verzerrungen aufweisen können, und die in Nr. 5 besprochenen vorteilhaftesten konformen Abbildungen haben bisher in der Praxis weniger Berücksichtigung erfahren.

Allgemeine *flächentreue* Abbildungen dagegen sind viel zu willkürlich und werden nur dann verwendbar, wenn sie sich mit der Forderung der *Längentreue* für charakteristische Kurvensysteme *verbinden.* Aus diesen Gesichtspunkten entspringt eine grosse Zahl von *Kartenentwürfen,* deren prinzipielle Nomenklatur trotz der systematischen Bezeichnungen *Tissot*'s[65]) und neuerer Kartographen wie *Hammer* und *Zöppritz* noch immer nicht einheitlich resp. übersichtlich festgesetzt erscheint.

Unter Hinweis auf die in den Fussnoten angegebene neuere Litteratur sei hier nur die Untersuchung von *Tissot*[66]) über die Verzerrung der Winkel, Flächen und Längengrössen und ihre gleichmässige Verwendung bei der Konstruktion einer Karte hervorgehoben.

Grundlegend ist dabei der *Tissot*'sche Satz (Nr. 2). Das Bild eines unendlich kleinen um P mit dem Radius r auf der Fläche beschriebenen Kreises ist daher eine orthogonale Projektion derselben,

---

projektionen, Stuttgart 1889; *N. Herz*, Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885; *A. Breusing,* das Verebnen der Kugeloberfläche, Leipzig 1892; *M. Fiorini,* Le projezioni della cartografia, Bologna 1881; le projezioni quantitative ed equivalenti della cartografia, Roma 1887; *M. Fiorini,* Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion, frei bearbeitet ven *S. Günther,* Leipzig 1895. Man vergleiche ferner die historischen Notizen von *S. Günther,* Geograph. Jahrbuch 9, p. 405; 12, p. 1; 14, p. 183; *E. Hammer,* ibid. 14, p. 4; sowie das schon erwähnte Werk von *E. Hammer,* Stuttgart 1887, p. 88; ferner *Eug. Gelcich,* Geschichte der flächentreuen Projektionen, Ztschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde, 21, p. 285 (Berlin 1886); *d'Avezac,* Coup d'oeil historique sur les projections des cartes, Paris société de géographie Bull. (5) 5 (1863), p. 351. — Erste Weltkarte in stereographischer Projection 1512; erste flächentreue Projektion 1514 nach *Joh. Staben* von *J. Werner* (Annotationes Joan. Verneri, Nürnberg 1514).

65) *Tissot*'s Nomenklatur im Mémoire, Paris 1881, p. 129.

66) Vgl. *Tissot-Hammer* 64), p. 1—21; die mathem. Theorie der Abbildung d. Rotationsflächen daselbst, p. 284 ff.

d. h. eine *Ellipse* mit den Axen ra, rb. Ist 2ω die grösste Veränderung, welche für den Winkel zweier von P ausgehenden Tangentenrichtungen eintritt, und n das Verhältnis korrespondierender infinitesimaler Flächenstücke, so ist:

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad n = ab;$$

bei konformer Abbildung ist $a = b$, bei äquivalenter $ab = 1$. Die Längenverzerrung der Hauptrichtungen ist a, b (dies sind zugleich die Extremwerte), die Flächenverzerrung ist ab; bei flächentreuer Abbildung fallen die dann immer *reellen* automekoischen Kurven mit den Richtungen der extremalen Winkelverzerrung zusammen. Mit Rücksicht hierauf konstruierte *Tissot*[67]) seine *kompensative Projektion* eines nach allen Richtungen um einen Nullpunkt ausgedehnten Bereiches auf einer Rotationsfläche. Entsprechen den Axen der rechtwinkligen Koordinaten x, y der Ebene der Nullmeridian und Nullbreitenkreis, ist φ die Breite, r der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises, sind ferner φ_0, r_0 die Werte von φ, r für den Nullpunkt, s der Bogen des Meridians zwischen den Breitenkreisen φ_0 und φ, endlich t der Bogen des Breitenkreises vom Nullmeridian aus gezählt, so besitzen alle Projektionsarten, welche durch die Gleichungen

$$x = s + \frac{\sin\varphi_0}{2r_0}t^2 + \frac{A}{3}s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \frac{B}{3}t^3$$

$$y = \frac{r}{r_0}t + \frac{Bs^3}{3} + As^2t - Bst^2 + \frac{C}{3}t^3$$

gegeben sind, unter der Bedingung

$$2(A+C)\cos^2\varphi_0 = \cos 2\varphi_0$$

Winkelverzerrungen von dritter, Längenverzerrungen von zweiter Ordnung in Bezug auf s, t. Durch ein graphisches Verfahren lassen sich die Konstanten schliesslich so wählen, dass diese Abweichungen den möglichst kleinen Betrag für ein gegebenes, allerdings innerhalb gewisser Grenzen liegendes endliches Gebiet erhalten. — Im Vergleich zu *Lagrange*'s, im allgemeinen auch von *Gauss* und anderen später festgehaltenen Standpunkte, la plus grande perfection d'une carte géographique doit consister dans la moindre altération des distances (Oeuvres compl. 4, p. 637), erscheint *Tissot*'s Verfahren als ein wesentlicher Fortschritt.

9. Die geodätische Abbildung, représentation géodésique, rappresentazione geodetica. *Beltrami*[68]) stellte zuerst die Aufgabe, alle

67) Siehe *Tissot-Hammer* 64), p. 30 ff.

68) *E. Beltrami*, Riportare i punti di una superficie sopra un piano in

Flächen zu finden, die sich auf die *Ebene* so abbilden lassen, dass wie bei der Zentralprojektion der Kugel, den *geodätischen Linien* die *Geraden* entsprechen. Es sind dies die *Flächen konstanter Krümmung*[69]), und aus einer Abbildung dieser Art gehen bei einer gegebenen Fläche nach *A. F. Möbius* alle anderen durch Kollineation der Ebene hervor.

Das gleichfalls von *Beltrami*[70]) gestellte Problem der Flächen, die mit Erhaltung der geodätischen Linien auf einander bezogen werden können, ohne zu einander isometrisch oder ähnlich zu sein, löste *Dini*[71]) für reelle Abbildungen und reelle Flächen mit Benutzung des *Tissot*'schen Satzes (Nr. 2). Zwei Flächen F und F' stehen nur dann in *Dini*'scher Beziehung, wenn ihre Längenelemente die *Liouville*'sche Form (III D 3, Nr. **18**)[72]):

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2)$$
$$ds'^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right)$$

haben, aber zu jeder Fläche F gehören noch ∞^1 Flächen F', weil, ohne Änderung von $U - V$, U durch $U + h$, V durch $V + h$ ersetzt werden können.

Ohne Beschränkung auf das Reelle löste *Lie*[73]) das Problem und fand ausser den *Liouville*'schen Flächen die des Längenelementes[74])

$$ds^2 = (u + V)\,du\,dv,$$

wo nun bei notwendig imaginärer Beziehung nur die *eine* Schar der Minimalkurven auf beiden Flächen sich entspricht.

---

modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, Ann. di mat. (1) 7 (1886), p. 185; Opere 1, p. 262; in vereinfachter Form bei *Dini* (siehe Fussnote 71) und *Darboux*, Leçons 3, p. 40.

69) *Beltrami*, ibid., p. 189, 203 (III D 5, Nr. **34**).

70) ibid., p. 204.

71) *U. Dini*, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche, Ann. di mat. (2) 8 (1869), p. 269; vgl. *Darboux*, Leçons, p. 42, auch *Scheffers*, 2 p. 424; *Bianchi*, p. 434; zwei auf einander geodätisch abbildbare Flächen sind daher „im allgemeinen" zu einander ähnlich.

72) *J. Liouville*, J. de math. 11 (1846), p. 345. Die beiden den Formen von ds^2, ds_1^2 entsprechenden Flächen können auch isometrisch sein; vgl. *R. Liouville*, Paris, C. R. 108 (1889), p. 335. *L. Raffy* nennt die Flächen mit *Liouville*'schem Längenelement *surfaces harmoniques*, Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 63.

73) *Lie*, Universitäts-Programm Christiania 1879; Math. Ann. 20 (1882), p. 419; Leipz. Berichte 1889, p. 155; *Lie-Scheffers* I, p. 166. Vgl. auch die Darstellung bei *Darboux*, Leçons 3, p. 63 ff.; desgl. *G. Königs*, Toulouse Ann. 6 (1892), p. 1.

74) Über die Beziehung der speziellen Flächenklasse der *Spiralflächen* (III D 5, Nr. 7) $ds^2 = e^{2u} f(u + v)\,du\,dv$ zur *Dini*'schen und *Lie*'schen Abbildung, vgl. *Lie*, Math. Ann. 20, p. 390, 431; *Lie-Scheffers* 1, p. 162.

Wesentlich verallgemeinert hat das *Dini*'sche Problem *Fr. Busse*[75]) durch die Forderung, dass jeder geodätischen Linie von F ein geodätischer Kreis von F' entsprechen soll[76]). Das System der nach *Dini* gebildeten Gleichungen lässt sich auch hier unter Voraussetzung der Minimalkurven von F' integrieren; in ausgezeichneter Weise tritt dabei die „*Schwarz*'sche Derivierte" hervor[77]). Natürlich gehören zu diesen Flächenpaaren F und F' je zwei solche, welche der *Dini*'schen Aufgabe entsprechen. Die Bedingungen der allgemeineren *Busse*'schen Frage sind dagegen nur dann erfüllt, wenn F zu einer *willkürlichen Rotationsfläche* isometrisch ist. Und alsdann muss die Fläche F *konform* auf eine Fläche F_0, welche mit F in *Dini*'scher Beziehung steht, so abgebildet sein, dass jeder geodätischen Linie von F_0 ein geodätischer Kreis von F' entspricht; dabei ist auch F' selbst isometrisch zu einer Rotationsfläche[78]). Und bei den Flächen F_0 und F', und *nur* bei diesen, entspricht auch *jedem* geodätischen Kreise wieder ein solcher[79]). Ist insbesondere F_0 von konstanter Krümmung, so kann auf dieselbe *jede* andere Fläche konstanter Krümmung (und nur eine solche) konform so abgebildet werden, dass jeder geodätischen Linie von F_0 ein geodätischer Kreis von F' entspricht[80]).

Die soeben berührte Frage nach den Flächen, bei denen *jedem* geodätischen Kreise wieder ein solcher entspricht, ist übrigens weit früher von *Lie* behandelt, der zu denselben Resultaten gelangte[81]); diese Frage lässt sich übrigens noch dahin erweitern, dass nur das Entsprechen von ∞^2 geodätischen Kreisen verlangt wird[82]).

75) *Fr. Busse,* Über diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke auf einander, bei welcher jeder geodätischen Linie der einen eine Linie konstanter geodätischer Krümmung der andern entspricht, Berlin, Ber. 1896, p. 651.

76) So nach *Darboux*'s Bezeichnung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung (III D 3, Nr. **38**) (Kurven kürzesten Umrings bei *Minding,* J. f. Math. 6 (1830), p. 159), in den Leçons 3, p. 151, im Gegensatz zu den geodätischen Kreisen von *Gauss* (III D 3, Nr. **15**).

77) Siehe *H. A. Schwarz,* Über einige Abbildungsaufgaben, J. f. Math. 70 (1869), p. 116 = Ges. Abh. 2, p. 65; *Busse* 75), p. 653 (I B 2, Nr. **20**).

78) *Busse,* ibid. p. 659.

79) *Busse,* ibid. p. 660.

80) *Busse,* ibid. p. 663.

81) *Lie,* Archiv for Math. og Naturv. 9 (1884), p. 62; vollständige Durchführung, ebenfalls mit Benutzung der *Schwarz'schen* Derivierten in *Lie-Scheffers* 1 (1893), p. 165). Es sei hier zugleich hingewiesen auf die Bedeutung der *Lie*schen Untersuchungen über Berührungstransformationen der Schar der geodätischen Kreise, die bereits 1884 begonnen, ebenda p. 133 behandelt werden (III D 8).

82) *Fr. Busse,* Dissertation Berlin 1896/97, Über eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmaasses auf die Ebene, p. 7.

Eine andere Verallgemeinerung des *Beltrami*'schen Problems besteht in der Forderung, dass den ∞^2 geodätischen Linien der einen Fläche überhaupt Kurven einer bestimmten Gattung auf einer andern entsprechen sollen. So sind die Flächen konstanter Krümmung auch die einzigen, welche konform so auf die Ebene abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien Kreise (resp. Gerade) der Ebene entsprechen[83]) (III D 5, Nr. **34**).

In Bezug auf die *Dini*'schen Sätze aber ergeben sich noch weitere Fragen, die aufs engste mit der Lehre von der Abbildung zusammenhängen.

Ist das Längenelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

überhaupt in die *Liouville*'sche Form transformierbar, so muss die *partielle Differentialgleichung* der geodätischen Linien (III D 3, Nr. **16**):

$$\Delta\theta = \frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{T^2} = 1 \tag{1}$$

ein homogenes Integral von der Form

$$A\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + 2B\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + C\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = \text{const.} \tag{2}$$

haben[84]). Ein besonderes Interesse gewinnen diejenigen Flächen, deren ds^2 auf *mehrfache* Art die Form von *Liouville* annehmen kann, die also auf einen grösseren Umfang von Flächen geodätisch abbildbar sind, wie im allgemeinen Falle. Nach *Darboux*[85]) ist jede Fläche, deren ds^2 auf *zwei* verschiedene Arten jene Form annehmen kann, auf ∞^1 verschiedene Weisen so transformierbar und so ergiebt sich das von *Darboux*[86]) gestellte Problem, das Längenelement dieser surfaces doublement harmoniques (*L. Raffy*[72])) zu bestimmen. Diese schwierige Frage, die in Zusammenhang mit *Lie*'s bereits 1882 be-

83) *Busse,* Dissertation, p. 9; ein allgemeinerer Satz bei *Lie-Scheffers,* p. 150.

84) *Darboux,* Leçons 3, p. 331. Nach *Darboux* ist des Längenelement ds auf die *Liouville*'sche Form reduzierbar, wenn die *Formen* (1), (2) des Textes *keinen* gemeinsamen linearen Faktor $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial v}$ haben; im Ausnahmefalle ist ds^2 von der Form *Lie*'s: $(u + V)\,du\,dv$ (s. p. 374).

85) *Darboux,* Leçons 2, p. 209; 3, p. 34.

86) *Darboux,* Leçons 2, p. 218. Vollständig behandelt *G. Ricci,* Lezioni p. 253 ff. diese Frage. Auf den Flächen konstanter Krümmung existieren ∞^4 Kurvensysteme von *Liouville*'schem Charakter (*Ricci*, p. 256); auf den zu Rotationsflächen isometrischen können unter gewissen Bedingungen ∞^2 Systeme vorhanden sein (p. 263); auf einer allgemeinen Fläche können sich unter gewissen Umständen ∞^1 ergeben.

gonnenen Untersuchungen über geodätische Linien steht[87]), ist von *Königs* und *Raffy* beantwortet worden[88]).

L. Bianchi[88a]) weist neuerdings auf eine Beziehung der geodätischen Abbildung zur Isometrie der Flächen hin. Auf einer Fläche F bilden die Kurven $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndu^2 = 0$, falls L, M, N *alle* Wertsysteme der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind, die den *Codazzi*'schen Gleichungen (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. **23**) des zu F gehörigen ds^2 entsprechen, ein System *potentieller* Haupttangentenkurven. Sollen nun zwei Flächen F und Φ so aufeinander abgebildet sein, dass alle potentiellen Haupttangentenkurven von F denen von Φ entsprechen, so muss für ihre Fundamentalgrössen L, M, N; $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$, die Beziehung bestehen:

$$L : M : N = \mathsf{L} : \mathsf{M} : \mathsf{N};$$

notwendig ist dazu, dass F und Φ *Dini*'sche Flächenpaare sind, und man hat unter diesen diejenigen besonderen Paare auszuwählen, auf denen sich zugleich die geodätischen Kurven und konjugierten Systeme entsprechen.

10. Die projektive oder kollineare Abbildung[89]). Diese Abbildungen können hier nur insoweit betrachtet werden, als dabei für die Flächentheorie eigentümliche Probleme hervortreten. Die einzige *konform perspektive Abbildung* ist die durch Ähnlichkeit oder reziproke Radii vectores[90]). Bei der Kollineation der Ebene besteht das System der *Tissot*'schen Hauptkurven (Nr. **2**) aus konfokalen Kegelschnitten[91]) (III C 1, Nr. **65**). Insbesondere hat *Scheffers*[92]) die *Verzerrungsgesetze der Figuren bei der ebenen Kollineation* synthetisch be-

87) *Lie*, Untersuchungen über geodätische Kurven, Math. Ann. 20 (1882), p. 357.

88) *G. Königs*, Résumé d'un mémoire sur les lignes géodésiques, Toulouse, Ann. 6 (1892), p. 1; Mémoire sur les lignes géodésiques, Paris Mém. savants étr. 31 (1894), Nr. 6; sodann *L. Raffy*, Recherches sur les surfaces harmoniques, résumé, Bull. soc. math. 22 (1894), p. 63 und 84; Determination des éléments doubles harmoniques, J. de math. (4) 10 (1894), p. 331; vgl. auch die in Fussnote 86 erwähnte Arbeit von *G. Ricci* (1898).

88a) *L. Bianchi*, Sopra un problema della teoria della deformazione delle superficie, Roma Lincei, Rend. (5) 9 (1902), p. 265.

89) Siehe Nr. **2**.

90) So z. B. *R. Hoppe*, Archiv Math. Phys. (2) 4 (1886), p. 328.

91) Siehe *J. Liouville*, J. de math. 9 (1846), p. 346.

92) *G. Scheffers*, Verzerrung bei projektiver Abbildung ebener Figuren, Leipz. Ber. 44 (1892), p. 162. Analoge Untersuchungen für den Raum scheinen noch nicht ausführlicher behandelt zu sein. Vgl. indes *F. Richelot*, J. f. Math. 70 (1869), p. 137, 146.

handelt. Es giebt zwei Systeme konfokaler Parabeln, deren Kontingenzwinkel bei der Abbildung (bis auf Grössen höherer Ordnung) ungeändert bleiben, und je zwei Tangenten ein und derselben Parabel behalten vermöge der Kollineation ungeänderten Neigungswinkel. Umgekehrt sind die *Liouville*'schen konfokalen Kegelschnitte die Kurven der grössten Verzerrung der Kontingenzwinkel, in deren Tangenten zugleich die grösste Längenverzerrung stattfindet, während die automekoischen Kurven transcendent sind.

Sodann sei *Lie*'s Problem[93]) *der Flächen, die kontinuirliche projektive Transformationsgruppen in sich* gestatten, erwähnt. Wenn eine Fläche *mehr* als ∞^2 Transformationen dieser Art besitzt, so ist sie eine Regelfläche (eine Fläche zweiten Grades lässt sogar ∞^6 zu); die Flächen[94]) mit ∞^2 solchen Transformationen ergeben sieben, teils algebraische, teils transcendente Typen; endlich giebt es noch 10 Typen von Flächen mit ∞^1 Transformationen. Hieran schliesst sich das von *Lie* schon 1872 in Angriff genommene Problem der Bestimmung der *Translationsflächen*, die in mehrfacher Weise durch Translation einer Kurve erzeugt werden können[95]) (III D 5, Nr. **6**).

Andere Fragen betreffen die *Erhaltung gewisser Kurvengattungen* auf den Flächen bei projektiver Umformung. Invariant sind z. B. die Haupttangentenkurven (III D 3, Nr. **36**), allgemeiner die konjugierten Systeme (Nr. **2**)[96]) (III D 3, Nr. **37**); man vergleiche damit

93) *Lie,* Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuirliche Schar projektiver Transformationen enthalten. Erste Mitteilung von 1869; vollständige Durchführung in Band 3 der Theorie der Transformationsgruppen, Leipz. 1893, p. 180 und den Leipz. Ber. 46 (1895), p. 209; weniger vollständig bei *F. Enriques,* Le superficie con infinite projezioni projettivi in se stesse, Veneto Istit. Atti (7) 4 (1893), p. 1590; (7) 5 (1894), p. 638. Vgl. auch die Untersuchungen von *G. Fano,* Roma Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 119; (5) 8 (1899), p. 562, sowie weitergehende Betrachtungen von *G. Castelnuovo* und *F. Enriques,* Paris, C. R. 121 (1895), p. 242; *P. Painlevé,* ibid., p. 318. Über die *Klein-Lie*'schen W-Flächen s. III D 5, Nr. **6**.

94) *Lie,* Leipz. Ber. ibid., p. 218—235; bemerkenswerte Untergruppe daselbst, p. 247 mit ∞^2 *vertauschbaren* Transformationen.

95) *Lie,* Christiania Verhandl. 1872, p. 27; Archiv f. Math. og Naturvidensk. 7; sodann: Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem, Paris, C. R. 114, p. 277 (1892); Leipz. Ber. 48 (1896), p. 141; 49 (1895), p. 181; vgl. *Lie-Scheffers* 1, p. 398.

96) Die sogenannte zweite Differentialform der Flächentheorie (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. 8)

$$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$$

ist überhaupt in Bezug auf solche Transformationen invariant derart, dass die L, M, N nur einen gemeinsamen Faktor bei denselben erhalten; vgl. *A. Voss,* Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891), p. 189; ins-

wieder die Invarianz der Krümmungslinien bei der Transformation durch reziproke Radien (III D 3, Nr. **35**), resp. die *Lie*'schen Berührungstransformationen, welche Krümmungslinien in Haupttangentenkurven verwandeln (III D 8) etc. Bei der Projektion von Flächen auf eine Ebene ergiebt sich der Satz von *Königs*[97]) (III D 3, Nr. **36**): die Projektion der Haupttangentenkurven bildet ein Kurvensystem gleicher Invarianten der betreffenden *Laplace*'schen Differentialgleichung. Auch hier scheint die Kollineation im Raume, namentlich in ihren Beziehungen zu *metrischen* Grössen, weniger vollständig untersucht zu sein[98]).

11. Die sphärische Abbildung (III D 3, Nr. **7**). Bei *Gauss*'[99]) sphärischer Abbildung gehört zu jedem Punkte P der aber als nicht developpabel vorausgesetzten Fläche F der Punkt p der Einheitskugel, in dem die letztere von dem durch ihr Zentrum parallel zur *positiven* Flächennormale von P gezogenen Halbstrahle getroffen wird[100]); die Abbildung hat dabei gleichen oder entgegengesetzten Sinn in Bezug auf die Punkte P und p, je nachdem die Krümmung von F daselbst elliptisch oder hyperbolisch ist, falls man die Fläche von ihrer *positiven* Seite, die Kugel von aussen betrachtet[101]). Für Punkte mit hyperbolischer oder elliptischer Krümmung ist die Abbildung immer eine *umkehrbar eindeutige*. Eine Mehrdeutigkeit tritt für die Umgebung parabolischer Flächenpunkte auf, die ausführlicher zuerst von *Hilbert*, insbesondere aber von *W. Boy* in Rücksicht auf ihre verschiedenen Gattungen untersucht sind[102]). Zugleich entspricht jeder Tangente PP' auf F die Tangente pp' der Kugel, welche zur konjugierten Richtung von PP' *senkrecht* steht[103]); ist also PP' insbesondere eine

besondere auch *Bianchi*'s *isotherm konjugierte* Systeme $M = 0$, $L = N$ (*Bianchi*, p. 136) (III D 3, Nr. **42**).

97) *G. Königs*, Paris, C. R. 114 (1892), p. 55; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 33.

98) Vgl. *A. Voss*, Math. Ann. 39 (1891), p. 179; hinsichtlich der Transformation des Krümmungsmaasses und anderer invarianter Gebilde siehe auch *R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 36 (1891), p. 212; 37 (1892), p. 186; *G. Vivanti* (ibid. 37, p. 1).

99) *Gauss*, Disquisitiones art. 6, vgl. indessen Fussn. 2.

100) Die Punkte P, p besitzen daher bei jeder Beleuchtung durch parallele Strahlen gleiche Helligkeit.

101) Diese Vorzeichenunterscheidung schon bei *Gauss*; insbes. Werke 8, p. 425. Vgl. *S. Finsterwalder*, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsch. Math.-Verein. Jahresber. 6 (1899), p. 60; *J. Hadamard*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 352; auch *Scheffers* 2, p. 210.

102) Vgl. *Finsterwalder*, Fussn. 101; *W. Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Diss. Göttingen 1901, p. 18.

103) *Darboux*, Leçons 1, p. 201; *Bianchi*, p. 118.

der Haupttangenten, so wird pp' senkrecht zu PP',[104]) und konjugierte Kurvensysteme von F bilden sich daher mit *ungeändertem Sinus* ihres Koordinatenwinkels ω auf die Kugel ab[105]). Für die *Tangenten der Krümmungslinien* von F und *nur für diese* wird endlich $pp' \parallel PP'$. Bezeichnet man die Richtungscosinus der Normalen, d. h. die Koordinaten des Punktes p, durch X, Y, Z, so erhält man für das Längenelement $d\sigma$ der Kugel die Gleichung:

$$d\sigma^2 = e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2,$$

wobei:

$$e = \frac{1}{T^2}(EM^2 - 2FLM + GL^2) = hL - kE$$

$$f = \frac{1}{T^2}(EMN - F(LN + M^2) + GLM) = hM - kF$$

$$g = \frac{1}{T^2}(EN^2 - 2FMN + GM^2) = hN - kG,$$

falls k das *Krümmungsmass* und h die mittlere Krümmung (III D 1,2, Nr. **35**):

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{T^2}$$

bedeutet.

Und hieraus folgert man wieder den *Bonnet*'schen Satz[106]), dass die Krümmungslinien ($F = 0$, $M = 0$) sich bei jeder Fläche in ein Orthogonalsystem auf der Kugel abbilden (III D 3, Nr. **35**), und dass — von dem trivialen Falle der *Kugel* selbst (III D 3, Nr. **4**), wo $E : F : G = L : M : N$, abgesehen — die *sphärische Abbildung der Minimalflächen* (und *nur* dieser) zugleich eine *konforme* ist[107]) (III D 5, Nr. **21**).

Von Wichtigkeit ist bei der sphärischen Abbildung der Flächen der von *Gauss* in Analogie zum Krümmungsmass der Kurven gewonnene *Begriff des Krümmungsmasses* k[108]):

---

104) Dieser Satz von der rechtwinkligen Drehung der Bilder der Haupttangenten wohl zuerst bei *U. Dini,* Ann. di mat. (2) 4, p. 180 (1870/71).

105) Nach *Bianchi,* p. 120 geht bei elliptischer Krümmung ω in $\pi - \omega$ über; bei hyperbolischer Krümmung bleibt ω ungeändert.

106) *O. Bonnet,* Paris, C. R. 37, p. 529 (1853).

107) *O. Bonnet,* Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes, J. de math. (2) 5, p. 227 (1860). Ebenda auch der übrigens aus den im Texte angegebenen Werten der e, f, g folgende Satz, dass die Minimalkurven auf der Kugel den zu den Minimalkurven auf der Fläche konjugierten Kurven entsprechen.

108) Vgl. Fussn. 2 und III D 1, 2, Nr. **36**; III D 3, Nrr. **33**, **34**. Wegen der oft — namentlich von Nichtmathematikern — beanstandeten Bezeichnung als Krümmungsmass der Fläche vgl. *Gauss*' eigene Worte in den Gött. gel. Anz. 1827, Werke 4, p. 343: „Übrigens liegt weniger an den Benennungen selbst als daran, dass ihre Einführung durch prägnante Sätze gerechtfertigt wird."

$$k = \lim \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta o}\right) \text{ für } \Delta o = 0,$$

wo Δo und $\Delta\omega$ korrespondierende Flächenstücke von F und der Einheitskugel bezeichnen, nebst der *Curvatura integra*:

$$K = \int k\, dO,$$

welche in Erweiterung von *Gauss*' Satz über die Curvatura der geodätischen Dreiecke[109]) durch *Bonnet* mit Hülfe des *Green*'schen Satzes (II A 7 b, Nr. **12**) durch ein über die Kontur von F erstrecktes Randintegral ausgedrückt wird[110]) (III D 3, Nr. **15**).

Über die *Probleme* der sphärischen Abbildung siehe Nr. **33**.

12. Andere Abbildungen. Da die Lehre von der Abbildung der Flächen schliesslich völlig mit der von den eindeutigen Transformationen derselben zusammenfällt, muss sich die folgende Darstellung auf einige besonders interessante Fälle von Abbildungen beschränken.

Zu diesen gehört das bereits von *Tschebyscheff* gestellte[111]), später von *Voss*[112]) behandelte Problem des *habillement des surfaces* (III D 3 Nr. **40**). Ein aus etwa rechtwinkligen Maschen völlig biegsamer unausdehnbarer Fäden gebildetes „kontinuierliches Gewebe" kann man im allgemeinen immer auf unendlich viele Arten auf einer krummen Fläche (allerdings nur innerhalb gewisser Grenzen) ausbreiten, entsprechend den unendlich vielen Arten, auf die das Längenelement ds^2 auf die Form

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f\, du\, dv$$

gebracht werden kann. Zwei der einfachsten Beispiele dieser Art geben die *Translationsflächen* (deren erzeugende Kurven ein solches Gewebe bilden), sowie die Flächen negativer konstanter Krümmung deren Haupttangentenkurven ein solches Netz bilden[113]), während das

109) *Gauss*, Disquisitiones art. 20. Seinem Vorzeichen nach wird k durch $\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ definiert.

110) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 216. In anderer Weise drückt *W. Boy* (Diss. Göttingen 1901) K durch ein über die sphärische Abbildung der Kontur von F auf die Kugel genommenes Integral aus.

111) *Tschebycheff*, Sur la coupe des vêtements, Assoc. franç. Congrès de Paris 1878. Bei *Darboux*, Leçons 3, p. 206 die partielle Differentialgleichung des Problems mit Hülfe der Differentialparameter.

112) *A. Voss*, Über ein Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen, Math. Ann. 19 (1881), p. 1; Deutsche Math.-Verein., Katalog, München 1892, p. 16.

113) Andere Beispiele bei *Voss*, Katalog, ibid., p. 20 ff. Vgl. auch *Servant*, Sur l'habillage des surfaces, Par. C. R. 135 (1902), p. 575.

Problem, auf der Kugel *alle* Systeme dieser Art zu finden, mit der Bestimmung der Flächen konstanter Krümmung $= 1$ zusammenfällt[114]).

Das *Christoffel*'sche Problem[115]) der Flächen, die durch parallele Normalen *konform* auf einander bezogen sind, liefert abgesehen von ähnlichen und gewissen imaginären Flächen die *Minimalflächen* (III D 5, Nr. **22**) und die Klasse derjenigen Flächen, die durch ihre *Krümmungslinien* konform auf einander bezogen sind. Es sind dies die *isothermen Flächen Bour*'s[116]) (III D 5, Nr. **37**), und zu *jeder* solchen Fläche mit dem Längenelement

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

gehört auch wirklich eine zweite:

$$ds'^2 = \frac{1}{\lambda}(du^2 + dv^2),$$

die in der angegebenen Weise der ersteren zugeordnet ist. *Darboux*[117]) hat neuerdings *Christoffel*'s Satz so erweitert, dass vermöge einer Enveloppenbeziehung von Kugeln jeder isothermen Fläche unendlich viele andere entsprechen.

Die für die konforme Abbildung in der Ebene bekannte Eigenschaft, dass korrespondierende Längenelemente einen nur vom Orte, nicht von der Richtung derselben abhängigen Winkel mit einander bilden, lässt sich nur in beschränkter Weise auf die Beziehungen zwischen zwei krummen Flächen übertragen. Soll überhaupt für zwei Flächen x, y, z; x_1, y_1, z_1 die Beziehung

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = \lambda\,ds\,ds'$$

bestehen (λ ist Funktion von u, v), *so ist die Beziehung konform*, wenn nicht $\lambda = 0$ ist, d. h. korrespondierende Elemente einen *rechten* Winkel mit einander bilden[118]). Eine solche *konforme* Beziehung

114) *J. Weingarten,* Zur Theorie der Oberflächen, J. f. Math. 62 (1863), p. 172.

115) *E. B. Christoffel,* Über eine allgemeine Eigenschaft der Minimumsflächen, J. f. Math. 67 (1867), p. 218; vgl. *Darboux,* Leçons 2, p. 239; desgl. 1, p. 326.

116) *E. Bour,* Sur la déformation des surfaces, J. éc. polyt. cah. 39, p. 118. Man beachte übrigens, dass die Fundamentalgrössen E, G der auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche nicht als willkürliche Funktionen von u, v angenommen werden können, sondern einer verwickelten Bedingung, die z. B. von *E. Combescure,* Paris, C. R. 74 (1872), p. 1514 aufgestellt wird, genügen. Über die Oberflächen mit isometrischen Krümmungslinien vgl. man ausser der in der Dissertation von *H. Willgrod,* Göttingen 1883 erwähnten Litteratur auch *J. Weingarten,* Über die Oberflächen, die durch ihre Krümmungslinien in Quadrate geteilt werden können, Berl. Ber. 1883, p. 1163.

117) *Darboux,* Sur les surfaces isothermiques, Ann. éc. norm. (3) 6 (1899), 491, insbes. p. 503.

118) Man erkennt leicht durch Anwendung des *Tissot*'schen Koordinaten-

findet aber nur dann wirklich statt, wenn die beiden Flächen Minimalflächen sind. Denn nun müssen, wie *Darboux*[119]) zeigt, die Gleichungen

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda ds^2$$
$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \mu ds\,ds_1 = \nu ds^2$$

erfüllt sein; aus ihnen folgt, dass die Flächen *Minimalflächen* sind, deren Tangentenebenen in korrespondierenden Punkten parallel laufen. Und umgekehrt sind zwei *beliebige* Minimalflächen stets in der gewünschten Beziehung, wenn man auf ihnen die Punkte mit parallelen Tangentenebenen einander zuordnet (III D 5, Nr. **23**). Von *Goursat* ist das *Mathet*'sche[119]) Problem noch erweitert. Flächen mit entsprechenden Scharen paralleler Ebenen sind durch parallele Tangenten der entsprechenden Schnittkurven konform auf einander abgebildet, wenn diese Flächen entweder zwei „derivierte" Minimalflächen oder zwei Rotationsflächen sind[120]).

13. Die Strahlensysteme (III D 3, Nr. **5**). In den vorigen Nummern sind meist besonders wichtige *Punkttransformationen* erwähnt. Die Zahl der Abbildungen wird weit grösser, wenn man auch noch die mannigfachen Beziehungen beachtet, die durch *Berührungstransformationen*, insbesondere aber durch die *Strahlensysteme* vermittelt werden. Da die neueren Fortschritte in der Theorie der Abbildung hauptsächlich auf diesem Gebiete liegen, erscheint eine kurze Darstellung der letzteren hier notwendig.

Bei einem *Strahlensystem*[121]), einer *Kongruenz*, d. h. einem (reellen) kontinuierlichen System von zweifach unendlich vielen Geraden, giebt es zu jedem Strahle g zwei benachbarte, deren kürzeste Abstände d_1 und d_2 von g durch die Minimumseigenschaft ausgezeichnet sind; die stets reellen Fusspunkte G_1, G_2 dieser Abstände d_1, d_2 sind die *Grenzpunkte* auf g, und die Ebenen $d_1 g$, $d_2 g$ stehen auf einander *senkrecht*. Der

systems, bei dem F und F' auf beiden Flächen Null sind, dass $\sqrt{EG'} = \sqrt{GE'}$, abgesehen von dem Ausnahmefalle $\lambda = 0$ (über denselben vergleiche man Nr. **32**) sein muss.

119) Bei *Darboux* wird übrigens konforme Beziehung der Flächen *nebst* der Bedingung für die Winkel korrespondierender Elemente vorausgesetzt; *Darboux*, Leçons 1, p. 329; vgl. auch *G. Mathet*'s, J. de math. (2) 8 (1863), p. 313 u. 323, Arbeit, in der zum erstenmale die betreffenden Fragen gestellt waren.

120) *E. Goursat*, Acta math. 11 (1888), p. 135. Eine Minimalfläche bleibt bis auf ihre absolute Lage ungeändert, bei reeller Rotation ihrer Minimalkurven, sie geht dagegen bei imaginärer Rotation derselben in eine *derivierte* Minimalfläche über, ibid. p. 144, vgl. auch III D 5, Nr. **28**.

121) *E. E. Kummer*, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, J. f. Math. 57 (1860), p. 189; vgl. *R. Hamilton*, Theory of systems of rays, Dublin Trans. 15 (1828), p. 69; 16 (1830) (III D 9).

Mittelpunkt M von G_1 und G_2 bildet die *Mittelfläche*[122]) der Kongruenz. Zu jeder Geraden g giebt es ferner zwei benachbarte g_1, g_2, welche sie in den *Brennpunkten* F_1, F_2, deren Mittelpunkt wieder M ist, schneiden; sie bilden die durch g gehenden *Developpabelen der Kongruenz* und die Ebenen $E_1 = (gg_1)$, $E_2 = (gg_2)$ sind die *Brennebenen*; die *Brennfläche* Φ ist der Ort der Punkte F_1, F_2 und gleichzeitig die Enveloppe der Ebenen E_1, E_2, aber E_1 berührt Φ in F_2, E_2 in F_1. Durch diese Zuordnung von F_1 und F_2 sind die *beiden Mäntel der Brennfläche*, die hier als verschiedene krumme Flächen angesehen werden, *auf einander abgebildet*[123]), und beim Fortschreiten im Kongruenzstrahl im Punkte F_1 gehört die zum Strahle F_1F_2 *konjugierte Richtung* von Φ im Punkte F_2.

Die Kongruenz besteht aus den *Haupttangenten* einer Fläche, wenn die Brennpunkte zusammenfallen; sie heisst eine *isotrope*[124]), wenn die *Grenzpunkte* zusammenfallen; die Brennebenen sind dann *isotrope Ebenen*, weil sie den imaginären Kreis im Unendlichen berühren; die Enveloppe der *Mittelebenen* ist eine *Minimalfläche*[125]) (III D 5, Nr. **30**). Die Kongruenz ist eine *Normale* oder *Normalenkongruenz*, wenn ihre Strahlen Normalen eines (Parallel-)Flächensystems sind; d. h. wenn die *Brennebenen* auf einander *senkrecht* stehen (Brenn- und Grenzpunkte zusammenrücken)[126]); sie heisst *harmonisch* zu einer Fläche F, wenn ihre Developpabeln auf F ein konjugiertes System ausschneiden, und eine *harmonische Normalenkongruenz* heisst eine *Dupin*'sche[127]).

Sind zwei Flächen F und F_1 punktweise so auf einander bezogen, dass korrespondierende Tangenten zu einander senkrecht stehen (vgl. Nr. **32**), so entsprechen sie sich durch Orthogonalität der Längenelemente (*Moutard*'sche Zuordnung)[128]). Die durch die Punkte von F_1

---

122) *Kummer*, ibid. p. 207; surface moyenne bei *Ribaucour*, Étude des élassoïdes ou surfaces de courbure moyenne constante, Bruxelles Mém. couronnées in 4°, 44 (1882), p. 2. Die Enveloppe der senkrecht zu g durch M gehenden *Mittelebenen* ist die enveloppée moyenne.

123) *Peterson* (Über Kurven und Flächen, p. 40) nennt diese Beziehung *Konjunktion;* die dort in Aussicht gestellte Theorie derselben ist leider nicht erschienen.

124) *Ribaucour*, Étude p. 21, 31, 119.

125) Fussn. 2; *Ribaucour* ibid; *Bianchi*, p. 273.

126) Vgl. *Kummer*, J. f. Math. 57, p. 227; die Bedingung für die Brennebenen schon bei *J. Bertrand*, J. de math. 9 (1844), p. 133.

127) *Ribaucour*, ibid. p. 3.

128) *Moutard*, Paris soc. philom. Bull. 1869, p. 45; vgl. *Ribaucour*, Étude p. 37. Die isotropen Kongruenzen sind diejenigen *Ribaucour*'schen, deren erzeugende Fläche eine *Kugel* ist, *Bianchi*, p. 305.

parallel zu den korrespondierenden Normalen gezogenen Geraden bilden eine *Ribaucour*'sche Kongruenz, deren erzeugende Fläche F, deren Mittelfläche F_1 ist. Ihre Developpabelen entsprechen den Haupttangenten von F und schneiden die Mittelfläche F_1 in einem konjugierten System gleicher Invarianten[129]). Und umgekehrt ist nach *Guichard*[130]) jede Kongruenz, deren Developpabele die Mittelfläche in einem konjugierten System schneiden, eine *Ribaucour*'sche.

Bei einer *Guichard*'schen[131]) Kongruenz schneiden die Developpabelen auf den beiden Brennmänteln die *Krümmungslinien* aus; die sphärischen Bilder der Developpabelen sind zugleich die der Haupttangentenkurven einer Fläche negativer konstanter Krümmung. Bei einer *Weingarten*'schen Kongruenz[132]) entspechen sich die Haupttangentenkurven auf den beiden Brennmänteln; einen besonderen Fall bilden die Kongruenzen von *Thybaut*[133]).

Eine *cyklische* Kongruenz[134]) wird gebildet von den Axen der Kreise, die ein cyklisches System bilden, d. h. ein System von ∞^1 Orthogonalflächen besitzen.

Auf die *allgemeinen* von ∞^2 Kurven gebildeten *Kongruenzen*[135]) lassen sich manche dieser Vorstellungen übertragen; indessen beschränken sich die Anwendungen auf Fragen der Abbildung bis jetzt grösstenteils auf die geradlinigen Kongruenzen.

14. Abbildungen allgemeineren Charakters. Von noch allgemeinerer Art sind gewisse Abbildungsprozesse, die durch Fragen der Geodäsie veranlasst werden. So zeigt *Christoffel*[136]), dass ein

---

129) Ein konjugiertes System auf einer Fläche hat gleiche Invarianten, wenn die Koordinaten x, y, z der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}$$

genügen (III D 3, Nr. **36**).

130) *C. Guichard,* Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 333; *Bianchi,* p. 303.

131) *Bianchi,* Sopra alcune nuove classi di superficie, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 308; *Bianchi,* p. 284.

132) *Bianchi,* p. 315.

133) *A. Thybaut,* Sur la déformation du paraboloide, Ann. éc. norm. (3) 14 1897, p. 71; die beiden Brennmäntel sind Minimalflächen, deren Haupttangentenkurven sich entsprechen; vgl. *Bianchi,* Roma Lincei, Rend. (5) 8 (1899), p. 15.

134) *Bianchi,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 314; *Bianchi* p. 346.

135) Man vergleiche *Darboux,* Leçons 2, p. 1 ff, sowie *Lie*'s Untersuchungen, Über Komplexe, Math. Ann. 5 (1872), p. 145 (III D 9).

136) *E. B. Christoffel,* J. f. Math. 64 (1864), p. 193; bei *J. Weingarten,* Festschrift der technischen Hochschule Berlin 1884, p. 43 wird an Stelle von $R_1 + R_2$ der Abstand der Tangentenebene der Fläche vom Anfang eingeführt.

Flächenstück F seiner Gestalt nach vollkommen bestimmt ist, wenn man unter der Voraussetzung eindeutiger Beziehung und gewisser Stetigkeitsbedingungen seine sphärische Abbildung und für jeden Punkt derselben die *Summe* der Hauptkrümmungsradien von F kennt; man kann also auch aus einer *endlichen* Anzahl der sphärischen Koordinaten X, Y, Z und der zugehörigen Grösse $R_1 + R_2$ die Gestalt von F durch Interpolation näherungsweise bestimmen.

Von einer sehr allgemeinen Fragestellung geht auch *Lüroth*[137]) aus. Zwei Flächenstücke F, F' sind derart auf einander stetig bezogen, dass bei entsprechenden Punkten P, P', denen die sogenannten Lotlinien a, a' zugeordnet sind, zu Ebenenbüscheln durch a projektiv entsprechende durch a' gehören. Der Charakter dieser Abbildung ist notwendig *eine Projektivität des Raumes*, welche in die Ähnlichkeit übergeht, wenn man für die Ebenenbüschel Kongruenz verlangt.

Der *allgemeinste Fall eindeutig stetiger Abbildung*[137a]) findet endlich in der Lehre von den *Riemann*'schen Flächen, d. h. in der *Analysis situs* (III A 4) ausgedehnte Verwendung. Hier sei nur der Satz von *C. Jordan*[138]) erwähnt: Zwei zweiseitige stetig deformierbare Flächen sind punktweise auf einander abbildbar, wenn die Anzahl ihrer Randkurven und die Maximalzahl der einander nicht schneidenden und die Flächen nicht in getrennte Stücke zerlegenden Rückkehrschnitte die gleiche ist.

Auf die wichtigen, ebenfalls in dieses Gebiet gehörigen Untersuchungen *Hadamard*'s[139]) über die Eigenschaften der sphärischen Abbildung singularitätenfreier Flächenstücke, denen sich die von *Hilbert*[140]), *W. Boy* und *O. Zoll*[141]) anschliessen, kann hier nur hingewiesen werden.

Über einen ähnlichen Satz für Ovaloide vgl. *H. Liebmann*, Gött. Nachr. 1897, p. 134.

137) *J. Lüroth*, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 19 (1890), p. 353; in verallgemeinerter Form Münch. Ber. 1892, p. 27; in weiterer geometrischer Durchführung: Studien über geodätische Abbildung, Math. Ann. 51 (1899), p. 161.

137a) Auf die *Abbildungen der algebraischen Flächen auf einander*, insbesondere auf die Ebene kann hier nicht eingegangen werden, da diese Fragen nicht der Infinitesimalgeometrie angehören (III C 10).

138) *C. Jordan*, Sur la déformation des surfaces, J. de math. (2) 11 (1866), p. 105. Der Satz gilt übrigens auch für zwei einseitige Flächen, vgl. *W. Dyck*, Beiträge zur Analysis situs I, Math. Ann. 32 (1888), p. 488.

139) *J. Hadamard*, Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, J. d. math. (5) 3 (1897), p. 331; les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, ibid. (5) 4 (1898), p. 27 (III D 3, Nr. **15**).

140) *D. Hilbert*, Über Flächen konstanter *Gauss*'scher Krümmung, Amer. math. soc. Trans. 2 (1901); p. 87 (III D 5, Nrr. **32**, **35**).

141) *O. Zoll*, Über Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen

C. Die Isometrie der Flächen.

a) Allgemeine Probleme.

15. Das Minding'sche Problem. Nach Nr. 2 besteht die Frage nach der Isometrie zweier Flächen F und F_1, deren Koordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1 als Funktionen der Parameter u, v; u_1, v_1 gegeben sind, in der Untersuchung, wann

$$ds_1^2 = E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2,$$

dadurch, dass u_1, v_1 in geeigneter Weise mit Hülfe zweier Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \varphi(u, v) \\ v_1 = \psi(u, v) \end{cases}$$

von u, v abhängig gemacht werden, in

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

transformiert werden kann, wobei nun die vermöge (1) einander zugeordneten Stellen beider Flächen einander isometrisch entsprechen. Nach *F. Minding*[142]) ist dazu nicht erforderlich, etwa sämtliche zu F isometrische Flächen zu ermitteln, unter denen sich dann auch F_1 befinden müsste, sondern die Bestimmung einer solchen Transformation kann *durch Differentiation und Elimination allein* erhalten werden, so lange nicht ∞^1 oder ∞^3 solche Zuordnungen vorhanden sind[143]).

Aus der Gleichheit der Krümmungsmaasse[144]) k und k_1 in entsprechenden Punkten von F und F_1 folgt sofort die *notwendige* Beziehung:

$$(2) \qquad k = k_1.$$

Ist nun *erstens* $k = k_1 = \text{const.}$, so zeigt *Minding* durch Einführung geodätischer Polarkoordinaten (III D 3, Nr. **15**), dass beide Flächen wirklich isometrisch auf einander bezogen werden können[145]). Der Beweis

---

Linien, Preisschrift Göttingen 1901 (III D 5, Nr. **39**); *W. Boy*, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Diss. Göttingen 1901; hervorgehoben sei hier die Abbildung der projektiven Ebene auf eine einseitige geschlossene singularitätenfreie Fläche, p. 46 (III A 1, 5; III D 3, Nr. 7).

142) *E. F. A. Minding*, Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, J. f. Math. 19 (1839), p. 370.

143) ibid. p. 387.

144) Dies ist *Gauss*' „Theorema egregium", Disquisitiones art. 12.

145) ibid. p. 374; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 219. Und zwei Flächen von gleichem konstanten Krümmungsmaass lassen sich immer auf ∞^3 Arten einander so zuordnen, dass zwei beliebige Punkte P, P' und zwei beliebige Tangentenrichtungen in diesen sich entsprechen. Hierzu ist die vollständige Kenntniss der geodätischen Linien der betreffenden Flächen erforderlich, was für $k = k_1 = 0$

beruht einfach darauf, dass für ein Koordinatensystem, gebildet von den von einem *beliebigen* Punkte P auslaufenden geodätischen Linien mit der Länge u und den von einem *beliebigen* Azimuth *aus gezählten* Richtungswinkeln v ihrer Tangenten in P das Längenelement einer Fläche $k = \pm 1$, 0 die Form

$$ds^2 = du^2 + F(u)dv^2$$

annimmt, wo $F(u)$ eine von jener Stelle und der Wahl des Azimuths *unabhängige* Funktion ist.

Sind *zweitens* k und k_1 Funktionen von u, v; u_1, v_1, so entwickelt *Minding* aus (2) die Gleichung:

$$\frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{T^2} = \frac{E_1 n_1^2 - 2F_1 m_1 n_1 + G_1 m_1^2}{T_1^2}, \tag{3}$$

wobei

$$dk = m\,du + n\,dv$$
$$dk_1 = m_1\,du_1 + n_1\,dv_1$$

gesetzt ist. Ist nun (3) eine *Identität*[146]), so lassen sich F und F_1 vermöge der Lösung einer Differentialgleichung auf einander isometrisch beziehen; im andern Falle liefern dagegen die Gleichungen (2), (3) *zwei von einander unabhängige* Relationen, welche gestatten zu entscheiden, ob eine *endliche* Zahl von Zuordnungen vorhanden ist, oder überhaupt eine Isometrie nicht stattfindet[147]).

Unabhängig von *Minding* hat dann *Bonnet*[148]) die Bedingungen der Isometrie *geometrisch* entwickelt. Er geht davon aus, dass nach *Gauss'* Theorem die *Kurven konstanten Krümmungsmasses* auf F und

---

nur Quadraturen, für $k = \text{const.}$ die Lösung je einer *Riccati*'schen Gleichung (II A 4 b, Nr. 8) verlangt; vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 223; *J. Weingarten,* Über die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von konstanter Krümmung, J. f. Math. 94 (1883), p. 181; 95 (1884), p. 325. Vereinfachungen treten ein, wenn man auf der betreffenden Fläche schon gewisse Kurvensysteme kennt. Sind insbesondere die *Minimalkurven* der Fläche konstanter Krümmung bekannt, so erfordert nach *Lie* (Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 363) die Ermittelung der geodätischen Linien nur noch Quadraturen, während nach *Darboux,* Leçons 1, p. 62 (vgl. auch *L. Raffy,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 1852) die isometrische Zuordnung sogar ohne weitere Integration ausgeführt werden kann.

146) d. h. entweder an und für sich oder vermöge der Gleichung (2) des Textes; man vgl. *Liouville* in den Applications von *Monge* Note 4, p. 592; 5, p. 600.

147) *Minding,* J. f. Math. 19, p. 387.

148) *O. Bonnet,* Mém. sur la théorie générale des surfaces, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 1, namentlich p. 83 ff.; *Bonnet* zitiert dabei nur *Minding*'s Arbeit 209) über die Deformation der *Regelflächen* von 1838.

F_1 sich entsprechen müssen, und reproduziert *Minding*'s Verfahren[149]), aber so, dass alle Gleichungen desselben eine durchsichtige geometrische Bedeutung erfahren; seine Formeln entsprechen dabei genau den durch *Beltrami*'s *Differentialparameter* (III D 3, Nr. 8) gelieferten[150]).

Die auf der Betrachtung dieser *invarianten Funktionen des Längenelementes* beruhende Form der Darstellung ist bei *Darboux*[151]) etwa folgende.

Sind, — abgesehen von dem Falle $k = k_1 = \text{const.}$ —

$$\varphi(u, v) \text{ und } \varphi_1(u_1, v_1)$$
$$\psi(u, v) \text{ und } \psi_1(u_1, v_1)$$

zwei von einander *unabhängige* invariante Funktionen der Längenelemente von F und F_1, welche demnach für den Fall der Isometrie in korrespondierenden Punkten gleichen Wert haben müssen, so ergeben sich aus den *notwendigen* Gleichungen

$$\varphi = \varphi_1; \quad \psi = \psi_1 \tag{4}$$

u_1, v_1 als Funktionen der u, v. Sind nun überdies die Gleichungen

$$\begin{cases} \Delta(\varphi) = \Delta_1(\varphi_1), \quad \Delta(\psi) = \Delta_1(\psi_1) \\ \Delta(\varphi, \psi) = \Delta_1(\varphi_1, \psi_1) \end{cases} \tag{5}$$

vermöge (4) erfüllt, so *sind* F und F_1 isometrisch. Insbesondere kann man auch $\psi = \Delta(\varphi)$ setzen, wenn $\Delta(\varphi)$ von φ *unabhängig* ist.

Wählt man daher $\varphi = k$, und ist $\Delta(k)$ *unabhängig* von k, so sind die Flächen F und F_1 dann und nur dann isometrisch, wenn die zwei Gleichungen

$$\Delta(\Delta(k)) = \Delta_1(\Delta_1(k_1))$$
$$\Delta(k, \Delta(k)) = \Delta_1(k_1, \Delta_1(k_1))$$

eine Folge der als verträglich vorausgesetzten Gleichungen

---

149) *O. Bonnet* (1860), Mém. sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, J. éc. polyt. cah. 41 (1865), p. 208.

150) Zugleich ergiebt sich die Lösung der *Minding*'schen Differentialgleichung, welche bei ∞^1 Isometrieen auftritt, nach *Bonnet*, Fussn. 149, p. 229 durch *Quadratur*. Übrigens findet sich der Differentialparameter $\Delta(k)$ schon bei *Gauss*, Disquisitiones art. 20; $\Delta(k)$ und $\Delta_2(k)$ bei *Minding* (1839); bei *Bonnet*, p. 222 ff.

151) *Darboux*, Leçons 3, p. 223; vgl. *J. Weingarten*, J. f. Math. 94 (1883), p. 183; *Stahl* und *Kommerell*, p. 109; in etwas anderer Anordnung bei *G. A. Nitsche*, Über das Problem der Biegung und der sphärischen Abbildung von Oberflächen, Diss. Leipzig 1898; desgl. auch *Bianchi*, p. 183, sowie *Liouville* in den applications, p. 592. Kennt man auf beiden Flächen schon die Minimalkurven, so kann die Frage natürlich einfacher entschieden werden, vgl. *Scheffers* 2, p. 277.

(6) $$k = k_1, \quad \Delta(k) = \Delta_1(k_1)$$

sind.

Ist aber $\Delta(k)$ *nicht* unabhängig von k,[152]) also $\Delta(k) = f(k)$, so widersprechen sich die Gleichungen (6), falls nicht auch $\Delta_1(k_1) = f(k_1)$ ist. Ist jedoch diese Bedingung erfüllt, so tritt die ebenfalls notwendige Gleichung

(7) $$\Delta_2(k) = \Delta_{21}(k_1)$$

hinzu. Sind diese Differentialparameter (7) von k, k_1 *unabhängig*, so sind die Flächen zu einander isometrisch, wenn die den Gleichungen (5) entsprechenden Bedingungen erfüllt sind, die sich nach *Darboux*, Leçons 3, p. 226 auf *eine* reduzieren. Ist aber $\Delta_2(k) = \chi(k)$ und zugleich $\Delta_{21}(k_1) = \chi(k_1)$, so existieren ∞^1 durch eine *Quadratur* bestimmte Zuordnungen, F und F_1 sind beide zu derselben *Rotationsfläche* isometrisch.

Seinem analytischen Charakter nach gehört das *Minding*'sche Problem zu der Lehre von der Transformation der quadratischen Differentialausdrücke, welche durch *Riemann*'s Arbeiten eingeleitet wurde[153]), während insbesondere *Christoffel*[154]) die Möglichkeit nachwies, auch für n Variabele das genannte Problem im allgemeinen auf Differentiations- und Eliminationsprozesse zu reduzieren.

---

152) Ist $\Delta(k) = f(k)$ und $f(k)$ nicht Null, so sind die Kurven konstanten Krümmungsmasses geodätisch parallel (III D 3, Nr. **15**). Der leicht zu ergänzende Fall $\Delta(k) = 0$, wo die Kurven Minimalkurven sind, und also auch $\Delta_2(k) = 0$ ist, scheint bisher nicht berücksichtigt zu sein, und ist auch im Texte ausgeschlossen. In diesem Falle versagt auch das Kriterium (*Bianchi*, p. 185; *Darboux*, Leçons 3, p. 229), nach welchem eine Fläche isometrisch zu einer Rotationsfläche ist, wenn $\Delta(k)$ und $\Delta_2(k)$ Funktionen von k allein sind. Dass $k = k_1$ im allgemeinen nicht $\Delta(k) = \Delta_1(k_1)$ etc. nach sich zieht, belegen *P. Stäckel* und *A. Wangerin* durch Beispiele, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 163 und 170; so z. B. haben alle Flächen des Linienelementes

$$ds^2 = du^2 + U^2\left(a + b\int\frac{du}{U^2}\right)^2 dv^2$$

in korrespondierenden Punkten gleiches k, ohne doch für beliebige a, b isometrisch zu sein.

153) *B. Riemann*, Fussn. 3.

154) *R. Lipschitz*, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen, J. f. Math. 70 (1869), p. 71; 71 (1870), p. 214, 288; 72 (1871), p. 1; *E. B. Christoffel*, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. f. Math. 70 (1869), p. 46; *A. Voss*, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke, Math. Ann. 46 (1880), p. 129 u. 571; *G. Ricci*, Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali, Ann. di mat. (2) 14 (1886), p. 1; *Lezioni*, p. 105; *Bianchi*, p. 34. Für das *binäre* Gebiet insbesondere vgl. *Weingarten*, Festschrift der technischen Hochschule Berlin 1884 (I B 2, Nr. **22**).

In Rücksicht auf die Vorstellungen der Flächentheorie nennt man nun bei zwei unabhängigen Variabeln u, v eine *Biegungsinvariante*[155]) jede Funktion des Ortes auf der Fläche, welche bei Einführung neuer Variablen absolute Invarianteneigenschaft besitzt, d. h. durch denselben Prozess in den u, v wie in den u_1, v_1 definiert ist. Enthält dieselbe nur die E, F, G und ihre Derivierten bis zur Ordnung n, so heisst sie eine *Gauss*'sche Invariante (einfachstes Beispiel für $n = 2$ ist k selbst[156]); enthält sie noch willkürliche Funktionen φ, ψ, welche bei der Transformation ihren Wert nicht ändern, so heisst sie eine *Beltrami*'sche Invariante (*Beltrami*'s Differentialparameter)[157]), so z. B. $\Delta\varphi$, $\Delta_2\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$. Enthält sie dagegen die Differentialquotienten $\frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2} \ldots$, so heisst sie eine *Minding*'sche Invariante[158]); ihr einfachstes Beispiel ist die *geodätische Krümmung* (III D 3, Nr. 12) einer auf der Fläche gezogenen Kurve. Die *allgemeinste* Invariante endlich setzt sich aus den drei angegebenen Klassen zusammen, und die *inneren* Eigenschaften der Flächen finden ihren vollständigen Ausdruck durch die systematische Untersuchung derselben.

16. Flächen mit diskreten Isometrieen in sich. Es kann vorkommen, dass die Gleichungen (4) und (5), von denen im allgemeinen die isometrische Beziehung zweier Flächen F und F_1 nach Nr. 15 abhängt, *mehrere* Auflösungen nach u_1, v_1 gestatten; F_1 ist dann in *mehrfacher* Weise zu F isometrisch, besitzt also Isometrieen *in sich*. Ob eine Fläche eines gegebenen Längenelementes ds^2 überhaupt in sich isometrisch ist, kann natürlich vermöge der Betrachtungen in Nr. 15 entschieden werden, indem man sämtliche Lösungen der betreffenden Gleichungen (4), (5), abgesehen von der identischen $u = u_1$, $v = v_1$, aufsucht[158a]). In vielen Fällen wird schon durch die Beschaffen-

155) *Weingarten*, J. f. Math. 94 (1883), p. 182; ganz allgemein bei *K. Zorawski*, Über Biegungsinvarianten, Acta math. 16 (1891), p. 1.

156) *Gauss*, Disquisitiones art. 11; *J. Liouville*, J. de math. 16 (1851), p. 131; symmetrischer Ausdruck für k in der Festschrift von *Weingarten*, p. 8 ff. Es giebt (*Zorawski*, Acta math. 16, p. 31) nur *eine Gauss*'sche Invariante von der zweiten oder dritten Ordnung; für $n > 3$ aber $n - 1$ solche.

157) *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 355; 3 (1865), p. 89, 260 etc.; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 203; *Bianchi*, p. fehlt.

158) *F. Minding*, J. f. Math. 5 (1829), p. 303; 6 (1830), p. 159. Es existiert *eine Minding*'sche Invariante für jede Ordnung der Differentialquotienten von u nach v, mit Ausnahme des Falles $n = 3$, wo *zwei* solche vorhanden sind (*Zorawski*, Acta math. 16, p. 41).

158a) Man kann auch direkt an geometrische Verhältnisse anschliessen. Entsprechende Stellen können — falls das Krümmungsmass nicht konstant ist

heit der Form $Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ zu entscheiden sein, ob *einfache* Transformationen dieser Art möglich sind[158b]). Eine allgemeine Behandlung in dem Sinne, dass für *bestimmte Flächenklassen* die Bedingungen aufgesucht werden, unter denen dieselben auch ausser der Identität Isometrieen in sich besitzen, scheint bisher nicht erfolgt zu sein. Nur die *Minimalflächen*, bei denen vermöge der *Weierstrass*schen Darstellung (III D 5, Nr. **21**) durch Funktionen einer einzigen komplexen Variabeln die Betrachtungen der Substitutionstheorie sich unmittelbar anwenden lassen, sind nach dieser Richtung hin vollständig auf ihren gruppentheoretischen Charakter untersucht[159]).

17. Die Kongruenz der Flächen. Eine ebenso vollständige Theorie der *äusseren* Eigenschaften einer Fläche, wie sie nach der Schlussbemerkung der Nr. **15** auf Grund der ersten Differentialform für die *inneren* möglich ist, ist *systematisch* in Bezug auf die zweite Differentialform $Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2$ bisher nicht durchgeführt. Das zuerst von *Lie* gestellte *Problem der Kongruenz*[160]) besteht nach *Bonnet*'s Fundamentalsatz[20b]) in der Untersuchung, wann sich auf zwei Flächen, die willkürlich durch Gleichungen gegeben sind, solche Parameter u, v; u_1, v_1 einführen lassen, dass ihre *sechs* Fundamentalgrössen *identisch* werden (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. **22**). *Notwendig* ist dazu, dass für die beiden etwa auf ihre Krümmungslinien bezogenen Flächen die Gleichungen

$$(1) \qquad R_i = R_i', \quad i = 1, 2,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_i}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial R_i'}{\partial u_1}; \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_i}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial R_i'}{\partial v_1}$$

stattfinden; dieselben sind auch hinreichend, denn die Fundamentalgrössen werden identisch, sobald vermöge der durch (1) bewirkten

---

— nur auf den Kurven konstanten Krümmungsmaasses liegen und auch nur da, wo die geodätische Krümmung und die geodätischen Abstände dieser Kurven von den benachbarten denselben Wert annehmen. — Bei *periodischen* Flächen sind natürlich diese Bedingungen von selbst erfüllt.

158b) So z. B. bei den aus den Binormalen einer Kurve gebildeten Regelflächen; beachtenswert ist auch das Beispiel bei *F. Ahl*, Untersuchungen über geodätische Linien, Diss. Kiel, 1901, p. 50.

159) *L. Sinigaglia*, Sulle superficie ad area minima applicabili su se stesse, Giorn. di mat. 36 (1898), p. 172; 37 (1899), p. 171; vgl. auch *L. Lecornu*, Acta math. 10 (1887), p. 201.

160) *Lie*, Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 466; Vorlesungen über die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, bearbeitet von *G. Scheffers*, Leipz. 1893, p. 710 ff.; vgl. auch *Scheffers*, 2, p. 341, der Kongruenz und Symmetrie unterscheidet.

Abhängigkeit der u_1, v_1 von den u, v die vier Gleichungen (2) bestehen[161]).

18. Das Bour'sche Problem. Das *zweite* Hauptproblem erfordert die Bestimmung aller zu einer Fläche isometrischen Flächen, allgemeiner *aller* Flächen eines *gegebenen* Längenelementes:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Abgesehen von speziellen Lösungen desselben[162]) ist dasselbe zuerst durch *Bour*, *Bonnet* und *Codazzi* in Angriff genommen[163]).

Setzt man mit *Bour* das Längenelement ds^2 in der Form $4\lambda du\, dv$ voraus (III D 3, Nr. **19**), so sind die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2\lambda$$

zu lösen. Durch die Annahme

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = ip\cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = iq\cos\theta_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = ip\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = iq\sin\theta_1$$

erhält man für z die *Bour*'sche *Differentialgleichung*[164]) mit der singulären Lösung $pq = \lambda$.[165]) Bei seiner *zweiten* Methode[166]) benutzt *Bour* orthogonal-geodätische Koordinaten (III D 3, Nr. **15**) und findet ein System von achtzehn Gleichungen zur Bestimmung der Richtungscosinus eines mit diesem Koordinatensystem fest verbundenen rechtwinkligen *Triëders*, als deren Integrabilitätsbedingungen nun die *Bour-Codazzi*'schen Gleichungen auftreten, durch deren Integration überhaupt die Lösung zu erfolgen hat.

---

161) In dem besonderen Falle der *Weingarten*'schen Flächen W (III D 5, Nr. **17**), bei denen eine Beziehung zwischen R_1 und R_2 besteht, ist diese Betrachtung etwas zu modifizieren; vgl. *Lie*, ibid. p. 714; *Scheffers*, 2, p. 367; die Entscheidung erfolgt übrigens auch hier durch Differentiation und Elimination.

162) So von *Minding*, Über die Biegung krummer Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 297 u. 365; desgl. 20 (1840), p. 171.

163) Siehe die Angaben im Litteraturverzeichnis. *Gauss* hat übrigens nicht nur das allgemeine Problem (vgl. Fussn. 1) bereits gestellt, sondern auch zu erledigen gesucht; Nachlass, Werke 8, p. 447.

164) *Bour*, J. éc. polyt. cah. 39, p. 13; in etwas anderer Form bei *Bonnet* cah. 42 (1867), p. 2. 165) Siehe Fussn. 168.

166) *Bour*, ibid. p. 17. *Bour*'s dritte, übrigens nicht viel weiter reichende Methode, p. 123, besteht in der Ermittelung allgemeinerer Lösungen aus solchen mit willkürlichen Konstanten mit Hülfe der *Lagrange*'schen Enveloppenbildung (II A 5, Nr. **32**).

Dini[167]) gab zuerst die *Bour*'sche Differentialgleichung unter Voraussetzung eines allgemeinen Längenelementes. In übersichtlicherer Form wird dieselbe von *Darboux* durch Benutzung einer in neuerer Zeit vielfach angewandten Transformation entwickelt, der[168]) in der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} dz^2 + dy^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 - dx^2 \\ = \left(E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right) du^2 + 2\left(F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv + \left(G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right) dv^2 \end{cases}$$

das Krümmungsmass der rechten Seite gleich Null setzt und so die Fundamentalgleichung

$$(2)\qquad \Delta_{22}(x) = (1 - \Delta(x))k$$

erhält; jeder reellen Lösung derselben, bei der $\Delta(x) < 1$ ist, entspricht auch eine reelle Fläche des gegebenen Elementes, die dann mit Hülfe von Quadraturen gefunden werden kann[169]).

Die Gleichung (2), auf welche (abgesehen von durch Berührungstransformationen erfolgenden Umformungen) jede andere Behandlung des Problems führt, die an die drei auf der *sphärischen Abbildung* beruhenden *Codazzi*'schen Fundamentalgleichungen (III D 1, 2, Nr. **34**; III D 3, Nr. **7**) für die L, M, N[170]) anknüpft, ist von der *Monge-Ampère*schen Form (II A 5, Nr. **43**):

$$(rt - s^2) + Ar + 2Bs + Ct + D = 0;$$

---

167) *U. Dini,* Giorn. di mat. 2 (1864), p. 282. *Bour*'s *zweite* Methode ist dagegen von *R. Lipschitz* (Berlin, Monatsber. 1882, p. 1077; 1883, p. 169 u. 541) unter Voraussetzung des allgemeinen Längenelementes vollständig durchgeführt worden.

168) So schon 1872 im Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces, 2. éd. Paris 1896, p. 17 und 182; vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 250. Dabei zeigt sich auch der Grund für das Auftreten von *Bour*'s singulärer Lösung: verschwindet die Diskriminante von (1), so wird die Form (1) ein Quadrat, was natürlich auszuschliessen ist; übrigens ist die Gleichung $\Delta(x) = 1$ die bekannte partielle Differentialgleichung der geodätischen Linien (III D 3, Nr. **18**).

Die Gleichung (2) des Textes (über die Bedeutung der Abkürzungen siehe die Darstellung bei *Darboux* und *Bianchi,* p. 203) war übrigens, wie *Weingarten* (Festschrift, p. 2) bemerkt, durch *Gauss,* Disquisitiones art. 11 schon völlig vorbereitet. Eine andere elegante Form der allgemeinen Gleichung (2) entwickelt mit Hülfe der Differentialparameter *Darboux,* Leçons 3, p. 259.

169) Die Gleichung hat also einen *grösseren Umfang,* wie das gestellte Problem. Während nun *Darboux* dies als unwesentlich betrachtet, sucht *Weingarten* in seiner Festschrift die beiden Fälle, in denen das gegebene ds^2 entweder gleich $dz^2 + dy^2 + dx^2$ oder gleich $dz^2 + dy^2 - dx^2$ wird (letzteres ist eben für $\Delta(x) > 1$ der Fall), zu sondern.

170) Hat man übrigens aus den drei *Codazzi*'schen Gleichungen die L, M, N bestimmt, so erfordert die Ermittelung der x, y, z in Funktion der u, v nur noch die Lösung einer unbeschränkt integrabelen totalen *Riccati*'schen Gleichung

ihre Charakteristiken sind die Haupttangenkurven der Fläche. Sie kann aber nach *L. Raffy*[171]), der direkt an die für das Krümmungsmass und die mittlere Krümmung (die beiden simultanen absoluten Invarianten der Formen $Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdu^2$ und $Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2$) (I B 2, Nr. 22; III D 3, Nr. 8) aus den *Codazzi*schen Gleichungen folgenden Relationen anschliesst, und *Combescure*[172]), der sich kinematischer Betrachtungen bedient, durch eine lineare Differentialgleichung vertreten werden.

Auf die Gleichung (2) lassen sich die Integrationsmethoden der *Monge-Ampère*'schen Charakteristikentheorie nicht zur Anwendung bringen, da dieselbe keine Zwischenintegrale besitzt. *Weingarten*[173]) hat daher eine *neue Fundamentalgleichung* entwickelt, welche nicht wie die früheren auf der sphärischen Abbildung der Flächennormalen, sondern auf der der anderen beiden in der Tangentenebene liegenden Axen eines mit der Fläche verbundenen rechtwinkligen Trieders beruht. Wesentlich ist bei dieser Untersuchung die Verwendung einer durch Quadratur zu erreichenden, durch invariante Eigenschaften und rationale Adjunktion eines orthogonalen Trieders ausgezeichnete, mit der curvatura integra zusammenhängenden Form des Längenelementes (reduzierte Form von *Weingarten*)[174]). Diese neue Gleichung ist dadurch ausgezeichnet, dass sie — wenn überhaupt — immer *zwei* Zwischenintegrale zulässt, und dann nach bekannten Methoden integriert werden kann (II A 5, Nr. 44 f.). Dieser bemerkenswerte Fall ist freilich nur für die Flächen des Längenelementes

$$ds^2 = v^2 du^2 + (lv^2 + m)\,dv^2$$

mit zwei unabhängigen Variabeln (II A 4 b, Nr. 8); vgl. die Darstellung bei *Scheffers* 2, p. 331 ff.; *Bianchi*, p. 93.

171) *L. Raffy*, Paris soc. math. Bull. 25 (1897), p. 1; vgl. auch Paris, C. R. 114 (1892), p. 1407.

172) *E. Combescure*, Paris, C. R. 105 (1887), p. 434.

173) *Weingarten*, Sur la déformation des surfaces, Acta math. 20, p. 159. Vgl. *G. Ricci*, Della equazione fondamentale di *Weingarten*, Veneto Istit. Atti (7) 8 (1897), p. 1230.

174) *Weingarten*, ibid. p. 166 ff. Eigentlich entwickelt *W. zwei* Formen der Fundamentalgleichung, je nachdem das System der X- oder Y-Axen des erwähnten Trieders sphärisch abgebildet wird; er zeigt auch (Note zur Theorie der Deformation der Flächen, Acta math. 22 (1899), p. 193) dass ein von *G. Hessenberg*, Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen, Diss. Berlin 1898/99, Acta math. 23 (1900), p. 121 bemerkter Ausnahmefall, wo diese Abbildung sich auf eine Kurve reduziert, nicht gleichzeitig für *beide* Systeme X und Y eintreffen kann.

erfüllt, bei der l, m Konstanten sind; sie lässt sich aber auch noch in anderen Fällen durch die *Laplace*'sche Methode integrieren (II A 5, Nr. **53**) und erweist sich so überhaupt als die gemeinsame Quelle, aus der alle bisher erzielten Resultate (vgl. Nr. **31**) über vollständige Gruppen der Isometrie hergeleitet werden können.

Darboux hat die weitere Untersuchung der Fundamentalgleichung wesentlich in kinematisch geometrischer Hinsicht entwickelt[175]). Jede Bewegung eines ebenen Systems A in seiner Ebene E besteht bekanntlich darin, dass eine mit A festverbundene Kurve Σ, der Ort der momentanen Rotationscentra in A, auf einer festen Kurve von E (dem Ort der momentanen Centra in E) *abrollt* (IV 3, Nr. 8). Die momentane Bewegung eines Systems im Raume ist freilich keine Rotation, sondern eine Schraubenbewegung, sie kann aber in zwei Rotationen um zu einander senkrechte, im allgemeinen windschiefe Axen zerlegt werden (IV 2, Nr. **12**; IV 3, Nr. **18**). Schneiden sich diese letzteren, so existiert ein momentanes Centrum[176]), und die Bewegung besteht darin, dass eine mit dem räumlichen Systeme A fest verbundene Fläche Σ auf einer festen Fläche S sich abwälzt[177]), d. h. so, dass die zu einander isometrischen Flächen Σ und S in der gemeinsamen Tangentialebene mit ihren Flächenelementen mit einander zur Deckung kommen. Hiervon ausgehend, kann man sich die Aufgabe stellen, zu einer *gegebenen* Fläche Σ alle zu ihr isometrischen dadurch zu ermitteln, dass man alle korrespondierenden Bewegungen dieser Art, d. h. alle Flächen S bestimmt. Dabei ergiebt sich wieder das System der *Codazzi*'schen Gleichungen, die damit zugleich eine kinematische Deutung erfahren. Auf die weitere Ausführung, die *Darboux*[178]) diesen Anschauungen gegeben hat, mit denen sich insbesondere eine eigentümliche kinematisch-geometrische Analyse von *Weingarten*'s Arbeit verbindet[179]), kann hier nur hingewiesen werden.

---

175) Eine andere, von *L. Raffy* (Paris soc. math. Bull. 22 (1884), p. 119) verfolgte Methode, die sich der Haupttangentenkurven bedient, benutzt *Darboux,* Leçons 3, p. 290.

176) So *P. Schönemann,* J. f. Math. 90 (1881), p. 44; siehe die Litteratur bei *Darboux,* Leçons 1, p. 68.

177) Siehe *A. Ribaucour,* Paris C. R. 70 (1870), p. 330.

178) *Darboux,* Leçons 4, p. 116 ff. In noch allgemeinerer Form hat *E. Combescure* die zugleich rollende und gleitende Bewegung einer Fläche Σ auf einer anderen S untersucht, Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces, Ann. éc. norm. (3) 5 (1888), p. 49; es ergeben sich dabei auch bisher nicht behandelte Probleme der Kinematik (IV 3, Nr. **27**).

179) Siehe *Darboux,* Leçons 4, p. 308—352.

19. Allgemeine Sätze über die isometrische Zuordnung und Biegung der Flächen. Hält man auf der Fläche F eine Kurve C fest, so muss auf jeder Fläche F', welche zu F so isometrisch ist, dass die Punkte von C einander zugeordnet sind, sowohl die absolute als auch die geodätische Krümmung von C ungeändert bleiben. Daraus geht hervor, dass F' entweder längs C *dieselbe* oder eine in Bezug auf die Schmiegungsebene von C zur Tangentenebene von F *symmetrische* Tangentenebene haben muss, falls nicht die Schmiegungsebene von C mit ihrer Tangentialebene auf F zusammenfällt. Und so folgt, dass eine *stetige Biegung* von F um C unmöglich ist, falls nicht C *Haupttangentenkurve* von F ist (Nr. **32**). Dies ergiebt sich übrigens auch daraus, dass diese letztere zu den *Charakteristiken* der Fundamentalgleichung gehört[180]).

Soll C dagegen auf einer isometrischen Fläche F' eine punktweise vorgeschriebene Gestalt C' annehmen, so ist das noch auf *zwei* Arten möglich, wenn die absolute Krümmung von C' in jedem Punkte *grösser* ist, als die geodätische von C im entsprechenden Punkte[181]). Sind aber diese beiden Krümmungsgrössen *gleich*, so muss C' Haupttangentenkurve auf F' werden: in diesem letzterem Fall ist übrigens nach *Enneper*'s Satz[182]) über die Torsion der Haupttangentenkurven die Gestalt von C' an sich schon völlig bestimmt, und es giebt dann unendlich viele zu F isometrische Flächen durch C', da nun eine stetige Biegung um C' noch möglich ist.[183]). — Eine Fläche lässt sich auf unendlich viele Arten einer isometrischen derart zuordnen, dass eine auf F gegebene Kurve C *Krümmungslinie* von F' wird, etc.[184]).

---

180) *Darboux*, Leçons 3, p. 252. Daher nennt *J. H. Jellett*, dem man die *ersten* Untersuchungen über die *infinitesimale Biegungs*deformation der Flächen verdankt, On the properties of inextensible surfaces, Dublin Trans. 22 (1854), p. 359 die Haupttangentenkurven Curves of flexure; Faltungslinien (linee di piegamento) bei *Bianchi*, Lezioni, p. 199. Ein Flächenstück positiver Krümmung kann also überhaupt nicht gebogen werden, wenn irgend ein Kurvenstück auf demselben festgehalten wird. Hinsichtlich der Eigenschaften der Haupttangentenkurven in Bezug auf stetige Biegung vergleiche man *Weingarten*, J. f. Math. 100 (1887), p. 306.

181) So *Bianchi*, p. 205 in weiterer Ausführung von *Darboux*' Untersuchungen Leçons 3, p. 279.

182) *A. Enneper*, Math. Ann. 2 (1869), p. 596. Nach *Bianchi*, p. 127 sind die Torsionen der beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Haupttangentenkurven stets absolut gleich $\sqrt{-\frac{1}{k}}$, aber von entgegengesetztem Zeichen.

183) Vgl. *Bianchi* p. 212; in weiterer Ausführung an einem speziellen Beispiel *Weingarten*'scher Flächen *A. Razzaboni*, Sulla flessione dell' evoluta del

Wir bemerken *Bonnet*'s Satz[185]): Zwei nicht developpabele isometrische Flächen F und F' sind kongruent oder symmetrisch, wenn die *eine* Schar der Haupttangentenkurven von F der einen von F' zugeordnet ist; er ergiebt sich fast unmittelbar aus den *Codazzi*'schen Gleichungen in Verbindung mit *Bonnet*'s Fundamentalsatz. Eine *Ausnahme* machen nur die *Regelflächen*; sie sind einer stetigen Biegung um ihre erzeugenden Geraden fähig. Und zwei Regelflächen R und R' sind auch *nur dann* zu einander isometrisch, wenn ihre Erzeugenden sich *entsprechen*, falls nicht jede derselben zu einer Fläche *zweiten Grades* Q isometrisch ist, und die Erzeugenden von R und R' den beiden *verschiedenen* Systemen der Erzeugenden von Q zugeordnet sind[186]).

Dass eine *überall konvexe geschlossene* Fläche F nicht gebogen werden kann, schloss auf Grund des entsprechenden *Cauchy*'schen Falles über konvexe geschlossene Polyeder[187]) schon *Lagrange* nach *Cauchy*'s Angabe[188]). Auch *Minding* führt den Satz als selbstverständlich an[189]). Erst *Jellett*[190]) zeigte mittelst der Methoden der Variationsrechnung, sich auf unendlich kleine „Biegungsdeformationen" beschränkend, dass eine überall konvexe geschlossene Fläche überhaupt keine infinitesimale „Biegung" zulässt.

In schärferer Weise hat neuerdings *Liebmann*[191]) diese Be-

---

catenoide, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 154 und *B. Calò*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 195.

184) *Darboux*, Leçons 3, p. 289; *Bianchi*, p. 213.

185) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 41 (1860), p. 210; ibid. cah. 42 (1867), p. 27 fordert er noch die Zuordnung *beider* Systeme der Haupttangentenkurven; in der Addition von 1867, p. 36 der allgemeine Satz.

186) Dieser besondere Fall bei *Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 42, p. 52; in nicht richtiger Form wird das Theorem über die Deformation der Regelflächen in Paris C. R. 57 (1863), p. 811 ausgesprochen. Den Fall, dass die Erzeugenden einer R bei der Deformation *krummlinige* geodätische Kurven von R' werden, bemerkte schon *Minding*, Über die Biegung krummer Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 365. Vgl. auch die Darstellung bei *Darboux*, Leçons 3, p. 235, 287.

187) *A. L. Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 87. *Euklid* erklärt bekanntlich Polyeder mit kongruenten Seitenflächen von derselben Anordnung für kongruent oder symmetrisch (III A 3). Einseitige geschlossene Polyeder können sehr wohl deformierbar sein; ein charakteristisches Beispiel ist *R. Bricard*'s Octaèdre articulé, J. de math. (5) 3 (1897), p. 113.

188) *Cauchy*, Paris, C. R. 21 (1845), p. 564. Nach *Stäckel*, Bibl. math. (3) 2 (1900), p. 122 ist der Satz von *Euler* schon weit früher behauptet.

189) *F. Minding*, J. f. Math. 18 (1838), p. 366.

190) *J. H. Jellett*, Dublin Trans. 22 (1854), p. 375; vgl. auch *L. Lecornu*, J. éc. polyt. cah. 48 (1848), p. 1: Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles.

191) *H. Liebmann*, Gött. Nachr. 1899, p. 44; Habilitationsschrift, Leipzig

trachtungsweise für *Ovaloide*, d. h. geschlossene singularitätenfreie, einfach zusammenhängende analytische Flächen mit durchweg von Null verschiedenem positiven Krümmungsmass durchgeführt.

Durch die Unmöglichkeit unendlich kleiner Biegungsdeformationen wird indess keineswegs die Frage beantwortet, ob nicht zu einem Ovaloid isometrische Flächen überhaupt möglich sind. Für die *Kugel* entscheidet dies der Satz von *Jellett* und *Liebmann*: Das einzige Ovaloid konstanter mittlerer Krümmung ist die Kugel[192]).

b. Spezielle Probleme.

20. Untergruppen, bedingte Biegungen. Es sind bereits in Nr. 18, der historischen Entwickelung vorgreifend, die verschiedenen Wege geschildert worden, durch welche man gesucht hat, eine allgemeine Lösung des *Bour*'schen Problems wenigstens in gewissen Fällen vollständig zu erreichen. Die nächsten Fortschritte in der Lehre von der Isometrie beruhten indessen nicht auf einer Fort-

---

1899; Math. Ann. 53 (1900), p. 81, in vereinfachter Form Math. Ann. 54 (1901), p. 505. Erfährt der Punkt x, y, z des Ovaloids die infinitesimalen Verschiebungen $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$ so wird ein Punkt $O(a, b, c)$ im Innern von F, dessen Verbindungslinien mit den Punkten von F' bei der Deformation von F invariabel verbunden bleiben, nach dieser Deformation die Koordinaten $a + \varepsilon\alpha$, $b + \varepsilon\beta$, $c + \varepsilon\gamma$ erhalten. Die relativen Verschiebungskoordinaten α, β, γ repräsentieren die *Polfläche*; diese liegt ganz im Endlichen und hat trotzdem überall ein *negatives* Krümmungsmass, was einen Widerspruch enthält. Einen auf anderen Grundlagen beruhenden Beweis giebt *D. Hilbert,* Über Flächen konstanten *Gauss*'schen Krümmungsmasses, Amer. math. soc. Trans. 2, (1901), p. 87; vgl. auch *H. Minkowski,* Gött. Nachr. 1897, p. 198. Neuerdings zeigt *Liebmann* auch, dass infinitesimale Deformationen geschlossener nicht überall konvexer Flächen unter gewissen Umständen unmöglich sind: Über die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche, Gött. Nachr. 1901, p. 39, und erstreckt die Untersuchung auf konvexe Zonen von Rotationsflächen (Leipz. Ber. 55 (1901), p. 15) zugleich mit dem Nachweis, dass „reguläre" Isometrieen, d. h. solche, bei denen die Koordinaten der transformierten Punkte im ganzen Biegungsgebiet Potenzreihen des Biegungsparameters sind, auf Bewegungen hinauslaufen.

Übrigens ist auch ein einfach zusammenhängendes singularitätenfreies Flächenstück von konstanter positiver Krümmung immer ein Stück einer Kugelfläche, sobald dessen sphärisches Bild einen grössten Kreis völlig in sich enthält (*Liebmann,* Leipz. Ber. 52 (1900), p. 33). Zu solchen Teilen der Kugelfläche giebt es also keine isometrischen, während dies z. B. stattfindet, wenn das sphärische Bild ganz innerhalb eines grössten Kreises gelegen ist.

192) *J. H. Jellett,* Sur la surface, dont la courbure moyenne est constante, J. de math. 18 (1853), p. 163. Man vergleiche damit den Satz von *D. Hilbert:* Eine im Endlichen reguläre analytische Fläche ohne singuläre Stellen vom Krümmungsmass -1 existiert nicht, Amer. math. soc. Trans. 2 (1901), p. 87.

setzung der von *Bour* gemachten Versuche, die Fundamentalgleichung zu integrieren, sondern betreffen die *Bestimmung gewisser Untergruppen der allgemeinen Isometrie*[193]), sowie die Betrachtung *einzelner Flächenklassen* mit angebbaren isometrischen Zuordnungen. Erst die Untersuchungen *Weingarten*'s über die Centraflächen der W-Flächen gehen wesentlich über diese durch *Minding*, *Bonnet*, *Codazzi* und andere eingeschlagene Richtung hinaus.

21. Die Biegung der developpabelen Flächen. Die Biegung spezieller developpabeler Flächen tritt schon frühe, z. B. 1698 bei der Untersuchung *Jac. I Bernoulli*'s über geodätische Linien auf den Kegel- und Cylinderflächen auf[194]).

Euler[195]) gab zuerst 1771 die allgemeinen Gleichungen der Developpabelen unter der *Voraussetzung* ihrer geradlinigen Erzeugung durch die Tangenten einer willkürlichen Raumkurve; bald darauf fand *Monge*[196]) die partielle Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$ der nach *Euler* durch „Biegung" der Ebene gewonnenen Flächen.

Vollständig erledigt wird die *Frage nach allen zur Ebene isometrischen* Flächen implicite erst durch *Gauss*, bei dem aus der Invarianz des Krümmungsmasses folgt, dass bei jeder zu einer Ebene isometrischen Fläche ein System geodätischer Linien der ersteren *geradlinig bleiben muss*, diese letztere also wirklich „abwickelbar" oder *Tangentenfläche einer Raumkurve* ist[196a]) (III D 5, Nr. 3). Einen direkten analytischen Beweis dafür, dass jede Fläche mit dem Längenelement

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

in diesem Sinne developpabel ist, gab zuerst *Bonnet*[197]).

---

193) Solche Untergruppen kann man *bedingte* isometrische Zuordnungen resp. Biegungen nennen. *P. Stäckel* (Jahrbuch Deutsch. Math.-Verein. 1 (1892), p. 70) fasst diesen Begriff allerdings etwas anders.

194) *Jac. Bernoulli*, Opera 2, p. 796, 1023; *Joh. I Bernoulli*, Opera 1, p. 253, 262. Vgl. auch *L. Euler*, Petrop. Comm. 3, p. 110, Petersb. 1732; sowie *Stäckel*, Bemerkungen zur Geschichte d. geodät. Linien, Leipz. Ber. 45 (1893), p. 452.

195) *Euler*, De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet, Petrop. Comm. 15 (1772), p. 3.

196) *Monge*, Paris, Mém. 9 (1780), p. 382.

196a) Vgl. *Gauss*' eigene Bemerkung in den Gött. gel. Anz. 1827, Werke 4, p. 344; desgl. 8, p. 445.

197) *O. Bonnet*, Ann. di mat. (2) 7 (1875), p. 61; vgl. auch die Darstellung bei *Darboux*, Leçons 1, p. 86, sowie *Scheffers* 1, p. 278. *Nicht analytische Flächen* des Längenelementes $ds^2 = du^2 + dv^2$, welche, ohne überhaupt Regelflächen zu sein, zur Ebene isometrisch, aber im Sinne *Finsterwalder*'s (Deutsche Math.-Verein. 6 (1898), p. 61) *überall gefaltet* sind, bespricht *H. Lebesgue*, Paris, C. R. 128 (1899), p. 1502.

Die Transformation auf diese letztere Form ergiebt sich bei der durch ihre Rückkehrkurve (arête de rebroussement) *gegebenen* Developpabelen leicht[198]). Ist allgemein für das Längenelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

das Krümmungsmass gleich Null, so folgt sie nach *Darboux*[199]) mit Hülfe von *Beltrami*'s Ausdruck für die integrierenden Faktoren der komplexen Faktoren von ds^2 (III D 3, Nr. **19**) ebenfalls durch *Quadraturen*; erst durch *diese* Betrachtung ist die Frage in dem durch *Gauss* angedeuteten Sinne endgültig erledigt.

22. Isometrie und Biegung der Regelflächen. Die allgemeinen Verhältnisse bei der Isometrie der Regelflächen R sind schon in Nr. **19** besprochen. Durch kinematische Betrachtungen wurde zuerst *Minding*[200]) dazu geführt, die Flächen R mit Erhaltung der Erzeugenden *stetig zu verbiegen* (*Minding'sche Biegung der R*).

Sind

$$x = \xi + u\xi_1, \quad y = \eta + u\eta_1, \quad z = \zeta + u\zeta_1$$

die Koordinaten der R, ξ, η, ζ die nur vom Parameter v abhängenden Koordinaten der *Leitlinie*, ξ_1, η_1, ζ_1 die Richtungscosinus der Erzeugenden, so ist:

$$ds^2 = (\alpha + 2\beta u + \gamma u^2)\,dv^2 + 2\varepsilon dudv + du^2,$$

und man erhält aus der Bedingung für die Isometrie der Fläche R_1 mit den entsprechenden Koordinaten

$$X = \Xi + u\Xi_1, \quad Y = \mathsf{H} + u\mathsf{H}_1, \quad Z = \mathsf{Z} + u\mathsf{Z}_1$$

die Funktionen Ξ, H, Z durch Quadraturen, wenn man in

$$\Xi_1 = \cos\varphi\cos\psi, \quad \mathsf{H}_1 = \cos\varphi\sin\psi, \quad \mathsf{Z}_1 = \sin\varphi$$

φ als willkürliche Funktion von v annimmt. Während *Bonnet*[201]) im wesentlichen *Minding*'s Verfahren reproduziert, giebt *Bour*[202]) eine eingehendere Analyse der bei der Biegung eintretenden Möglichkeiten. Die Biegung kann so erfolgen, dass die Erzeugenden denen eines *gegebenen Leit-* oder *Direktorkegels* (III D 5, Nr. 2) parallel werden[203]),

198) So wohl zuerst *Liouville* in den Applications von *Monge*, Note IV, p. 583; vgl. *Darboux*, Leçons 1, p. 84.

199) *Darboux*, Leçons 3, p. 221.

200) *Minding*, Über die Biegung gewisser Flächen, J. f. Math. 18 (1838), p. 297. Vgl. *D. Codazzi*'s Preisschrift 1859, Paris Mém. [étr.] 27 (1872), p. 17, 39.

201) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 111.

202) *E. Bour*, J. éc. polyt. cah 39 (1862), p. 1.

203) *Bour*, ibid. p. 31, 44, 55.

oder in Hauptnormalen des Bildes einer Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der gegebenen R übergehen[204]). Ausgeführter sind ausser *Enneper*'s Untersuchungen, die sich an *Bonnet*'s Einführung der *Striktionslinie* der Regelflächen anschliessen[205]), *Beltrami*'s[206]) auf eine grosse Zahl von Biegungen unter vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen sich erstreckenden Resultate, die auch methodisch weiter führen, als das Verfahren von *Minding*. So kann jede geodätische Linie von R zur *geraden* Leitlinie der R',[207]) jede beliebige auf R liegende Kurve *eben*[208]) oder *Haupttangentenkurve*[209]) oder *Krümmungslinie* (wenn sie nicht Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden von R ist)[210]) auf R' werden; alle diese Einzelprobleme subsumieren sich übrigens, wie *Beltrami* bemerkt, unter allgemeinere.

Insbesondere existieren immer *zwei*[211]) mit *Parallelismus der Erzeugenden* auf einander bezogene isometrische Regelflächen; es ist aber nicht möglich, diese beiden Flächen durch eine *Minding*'sche Biegung in einander überzuführen[212]).

Dini's Untersuchungen beschäftigen sich mit den durch *Weingarten*'s Sätze (Nr. **31**) wichtig gewordenen W-Regelflächen[213]) (III D 5, Nr. **18**). Wir erwähnen endlich noch die zu Rotationsflächen isometrischen R; abgesehen von gewissen R mit imaginären Erzeugenden erhält man nur die Biegungsflächen der Minimalschraubenfläche und des Rotationshyperboloids[214]). Die zu Flächen konstanter Krümmung

---

204) *Bour,* ibid. p. 52.

205) *A. Enneper,* Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 391.

206) *E. Beltrami,* Sulla flessione delle superficie rigate, Ann. di mat. (1) 7 (1866), p. 105, Opere 1, p. 208.

207) *Beltrami,* Ann. di mat. ibid. p. 109.

208) ibid. p. 119.

209) ibid. p. 112.

210) ibid. p. 134.

211) *Beltrami,* ibid. p. 115. Vgl. *Darboux,* Leçons 3, p. 299.

212) Dass jene beiden Flächen (ebensowenig wie im analogen Falle zwei zu einander symmetrische) durch jene Biegung nicht auf einander abgewickelt werden können, zeigt *Darboux* Leçons 3, p. 302.

213) *U. Dini,* Sulle superficie gobbe, nelle quali uno dei due raggi di curvatura principali è una funzione dell' altro, Ann. di mat. (2) 7 (1866), p. 203; die einzigen Flächen dieser Art sind — bei der Beschränkung auf reelles — die auf die Minimalschraubenfläche abwickelbaren, ibid. p. 208; vgl. *Bianchi,* p. 382. Mit diesen Flächen beschäftigen sich auch *Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 104; *Beltrami,* Ann. di mat. (2) 7, p. 139.

214) In ausgeführter Untersuchung bei *Darboux,* Leçons 3, p. 230; der dort nicht berücksichtigte Fall derjenigen R, deren Erzeugende Minimalgerade sind, lässt sich leicht mit Hülfe von Fussn. 215 erledigen.

isometrischen R sind entweder developpabel, oder Flächen, deren Erzeugende Minimalgerade sind[215]).

23. Die Biegung der Rotationsflächen. Wird eine Rotationsfläche auf ihre Meridiankurven $v = \text{const.}$ und ihre Parallelkreise $u = \text{const.}$ bezogen, so lässt sich ihr Längenelement immer in die Gestalt[216])

$$ds^2 = du^2 + U dv^2$$

setzen, und dies ist zugleich die charakteristische Form, auf welche das Element jeder zu einer Rotationsfläche isometrischen gebracht werden kann. Nach Nr. **15** ist eine Fläche des Elementes

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

isometrisch zu einer Rotationsfläche, wenn die Linien konstanten Krümmungsmasses geodätisch parallel und zugleich von konstanter geodätischer Krümmung sind (was stets durch Differentiation und Elimination entschieden werden kann); diese entsprechen dann den Parallelkreisen[216a]). In anderer Ausdrucksweise heisst dies nach *Massieu*[217]), dass die partielle Differentialgleichung der geodätischen Linien[218]) (III D 3, Nr. **18**):

$$\Delta(\theta) = 1$$

ein homogenes lineares Integral haben muss. *M. Lévy* bemerkt[219]), dass alle Flächen, deren E, F, G homogene Funktionen der Parameter u, v vom Grade -2 sind, zu Rotationsflächen isometrisch

---

215) Auf diese letzteren weist *Stäckel* hin, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 481; *Scheffers* 2, p. 228 bestimmt ihre Koordinaten durch Quadraturen.

216) In Bezug auf die Minimalkurven ist also $ds^2 = f(u' + v')\, du'\, dv'$.

216a) Allgemeiner ist der für den vorliegenden Zweck nicht unmittelbar verwendbare Satz *Beltrami*'s: Eine Fläche ist isometrisch zu einer Rotationsfläche, wenn sie eine Schar von Parallelkurven mit jeweilig konstanter geodätischer Krümmung enthält, Giorn. di mat. 3 (1865) = Opere 1, p. 181, der noch in mehrfachen Formen ausgesprochen werden kann, ibid. p. 182.

217) *F. Massieu*, Thèse Paris 1861; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 29 fl.; vgl. auch *M. Lévy*, Paris, C. R. 86 (1878), p. 463 u. 947.

218) Siehe Gleichung (1) in Nr. **9**.

219) *M. Lévy*, Paris, C. R. 87 (1878), p. 788. Ist der Grad der homogenen Funktionen nicht gleich -2, sondern irgend eine andere ganze oder gebrochene Zahl, so ist die Fläche zu einer ∞^2 Biegungsgruppe von *Spiralflächen* (III D 5, Nr. **7**) isometrisch. Diese merkwürdigen, gleichzeitig von *Lie*, Archiv for Math. og Naturvidensk. 3 (1878), p. 460, betrachteten Flächen untersucht ausführlich bereits *K. Peterson* (*Peterson*, p. 87); daselbst auch die Unterscheidung zwischen Rotations- und Spiralflächen nach dem Grade der homogenen Funktionen E, F, G. — Übrigens sind auch alle Flächen, deren E, F, G Funktionen von $\alpha u + \beta v$ sind, zu Rotationsflächen isometrisch.

sind. — Es sei endlich hier (vgl. Nr. **32**) erwähnt, dass die zu Rotationsflächen isometrischen die *einzigen* sind, welche eine infinitesimale, mithin auch ∞^1 endliche kontinuierliche *Transformationen in sich* zulassen, d. h. in sich gebogen werden können [220]).

Minding bestimmte bereits die *Biegungsgruppe der Rotationsflächen* mit dem *Biegungsparameter* a: [221])

$$x = aU\cos\frac{v}{a},\quad y = aU\sin\frac{v}{a},\quad z = \int\sqrt{1-a^2+(f'u)^2}\,du,$$

bei der Meridiane und Parallelkreise wieder in solche übergehen.

Jede durch Schraubenbewegung aus einer Raum- oder ebenen Kurve entstehende *Schraubenfläche* (III D 5, Nr. **5**) ist zu einer Rotationsfläche isometrisch. *Bour* stellte zuerst die vollständige Biegungsgruppe aller zu ein und derselben Rotationsfläche isometrischen Schraubenflächen mit zwei willkürlichen Biegungsparametern a, b auf [222]). Die Koordinaten der letzteren sind für die Rotationsfläche

$$x = U\cos v,\quad y = U\sin v,\quad z = \int\sqrt{1-U'^2}\,du$$

gegeben durch:

$$X = a\sqrt{U^2-b^2}\cos\left(\frac{v-\varphi}{a}\right),$$

$$Y = a\sqrt{U^2-b^2}\sin\left(\frac{v-\varphi}{a}\right),$$

$$Z = bv+\psi,$$

wo φ, ψ zwei durch Quadratur aus U zu bestimmende Funktionen von u sind.

24. Isometrie mit Erhaltung der Krümmungslinien respektive der Hauptkrümmungsradien. Die Rotationsflächen lassen sich stetig so biegen, dass ihre Krümmungslinien Krümmungslinien bleiben, und jede Fläche, deren Krümmungslinien den Parallelkreisen und

220) Vgl. *Bianchi,* p. 321.

221) *F. Minding,* J. f. Math. 18 (1838), p. 367. Ausser diesen *Mindingschen* Biegungen *giebt es keine anderen,* welche Rotationsflächen in Rotationsflächen verwandeln, den Fall ausgenommen, wo die Rotationsfläche von *konstanter Krümmung* ist (III D 5, Nr. **33**). *M. d'Ocagne* bestimmt den geometrischen Charakter der Meridiankurven der gebogenen Flächen, Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 85. Erweiterungen namentlich in Bezug auf die Deformation bestimmter Kurven auf Rotationsflächen bei *G. Pirondini,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 206.

222) *Bour,* J. éc. polyt. cah. 39 (1862), p. 82; vgl. auch *U. Dini,* Ann. di mat. 1 (1865), p. 26, sowie in Rücksicht auf die Vollständigkeit der Gruppe die Bemerkungen von *Stäckel,* Math. Ann. 49 (1896), p. 256. Übrigens fand *Minding* (J. f. Math. 19 (1839), p. 376) alle in die Kugel verbiegbaren Schraubenflächen.

Meridianen einer zu ihr isometrischen Rotationsfläche sich zuordnen lassen, ist selbst eine Rotationsfläche[223]).

Die allgemeine Frage, wann Flächen stetig so gebogen werden können, dass ihre Krümmungslinien dabei *Krümmungslinien bleiben*, untersuchte zuerst *Codazzi*[224]). Er fand ausser den Developpabelen die Gruppe der *surfaces moulures* oder *Gesimsflächen* (III D 5, Nr. **13**), aber erst *Bour*[225]) bestimmte diese Biegungsgruppe mit dem Parameter a:

$$x = \frac{V}{a}\cos(au) + \int U \sin(au)\,du,$$

$$y = \frac{V}{a}\sin(au) - \int U \cos(au)\,du,$$

$$z = \int dv \sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}.$$

Bonnet[226]), der *Codazzi*'s Problem allgemein behandelte, zeigt, dass *ausser* dieser Gruppe noch bestimmte isometrische Flächenpaare (vgl. Nr. **34**) vorhanden sind, die sich mit Erhaltung der Krümmungslinien entsprechen. Und hieran schliesst sich das zweite Problem *Bonnet*'s[227]), die Bestimmung aller Flächen, die mit *Erhaltung der Hauptkrümmungsradien zu einander isometrisch* sind. Auch hier können ∞^1 Flächen vorhanden sein, welche eine Biegungsgruppe bilden; letztere besteht entweder aus den Flächen konstanter mittlerer Krümmung (III D 5, Nrr. **35**, **36**), und *jede* Fläche dieser Art gehört einer solchen Gruppe an, oder einer anderen Gruppe von ∞^1 Flächen, die erst von *Hazzidakis* explicite durch Quadraturen dargestellt wurde[228]); endlich giebt

223) *O. Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 25.

224) *D. Codazzi,* Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura, Ann. di mat. (1) 7 (1857), p. 410.

225) *E. Bour,* J. éc. polyt. cah. 39, p. 88. Diese Gesimsflächen (vgl. *Peterson* p. 62) werden durch eine ebene Kurve erzeugt, deren Ebene ohne zu gleiten sich auf einer Cylinderfläche abwickelt, zum Unterschiede von den allgemeinen moulures (superficie modanate), bei denen der Cylinder durch die Tangentenfläche einer Kurve ersetzt wird. Das Längenelement der Gesimsflächen ist $ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2$, vgl. z. B. *Darboux,* Leçons 1, p. 104. Man vgl. auch *L. Raffy,* Détermination de toutes les moulures, applicables sur les surfaces de révolution, Paris soc. math. Bull. 19 (1891), p. 34.

226) *Bonnet,* J. éc. polyt. cah. 42, p. 58 u. 65.

227) *Bonnet,* ibid. p. 73.

228) *J. N. Hazzidakis,* J. f. Math. 117 (1896), p. 42; vgl. auch *Servant,* Sur la déformation des surfaces, Paris soc. math. Bull. 29 (1901), p. 142. Über frühere Versuche, die von *Bonnet* nicht vollständig bestimmte Flächenklasse zu charakterisieren vgl. *M. Chini,* Giorn. di mat. 27 (1889), p. 107; *L. Raffy,* Paris soc. Bull. math. 21 (1893), p. 70.

es auch noch, abgesehen von gewissen imaginären Kegelflächen, besondere isometrische Flächenpaare dieser Art[228a]).

Das Problem der *moulures* ist übrigens von *Goursat* zur Bestimmung derjenigen Flächen verallgemeinert, welche eine Biegung zulassen, bei der eine Schar paralleler Ebenen wieder in eine solche übergeht; auch hier lassen sich die Koordinaten dieser Flächen durch Quadraturen darstellen[229]).

25. Isometrie mit Erhaltung konjugierter Systeme. Die in der vorigen Nr. betrachteten Flächen, welche mit Erhaltung der Krümmungslinien sich isometrisch entsprechen, gaben ein erstes Beispiel solcher Gruppen, die mit *Erhaltung konjugierter Systeme* (III D 1, 2, Nr. **37**; III D 3, Nrr. **3, 37**) zu einander isometrisch sind. Nach Nr. 2 haben zwei isometrische Flächen F und F' ein gemeinsames konjugiertes System[229a]). Haben aber drei zu einander isometrische Flächen ein gemeinsames System dieser Art, so lässt sich jede derselben durch stetige Biegung in die beiden anderen überführen, wobei das genannte System unverändert bleibt. Diesen schon von *Peterson*[230]) 1868 ausgesprochenen Satz beweist *E. Cosserat*[231]) im Anschluss an die von *Bonnet* bei den mit Erhaltung der Krümmungslinien bieg-

---

228a) *Bonnet*, ibid. p. 82.

229) *E. Goursat*, Amer. Journ. 15 (1892), p. 1; vgl. *P. Adam*, Paris soc. math. Bull. 24 (1896), p. 28.

229a) Über eine charakteristische Eigenschaft der *Codazzi*'schen Gleichungen in Bezug auf dieses gemeinsame System konjugierter Kurven bei zwei isometrischen Flächen vgl. *G. Königs*, Paris, C. R. 110 (1893), p. 596. Dieses System ist allerdings nicht immer reell; *A. Voss* führt daher Math. Ann. 46 (1895), p. 101 ein für je zwei solche Flächen „charakteristisches" gemeinsames Koordinatensystem ein, das stets *reell* wählbar ist.

230) *Peterson* nennt p. 59 solche konjugierte Systeme *Hauptbiegungslinien*.

231) *E. Cosserat*, Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces, Toulouse Ann. 7 (1893), Nr. 45. Dabei ergeben sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Theorie der Strahlensysteme. Das gemeinsame konjugierte System zweier isometrischer Flächen kann auf keiner derselben beliebig angenommen werden, sondern hat nach *A. Ribaucour* zum sphärischen Bilde das der Developpabelen einer *cyklischen Kongruenz* (Nr. **13**), ibid. Nr. 53; das sphärische Bild eines Netzes konjugierter Kurven, das auf ∞^1 isometrischen Flächen sich erhält, ist das der Developpabelen einer *cyklischen Kongruenz*, die zugleich eine *Ribaucour*'sche ist; vgl. auch *E. Cosserat*, Paris, C. R. 113 (1891), p. 460, sowie die Darstellung bei *Stäckel*, Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 272. Nach *Bianchi*, Sopra alcune nuove classi di superficie, Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 320 (vgl. auch *Bianchi*, p. 337) sind diejenigen Flächen, die mehr als ein konjugiertes System zulassen, das bei einer Isometrie konjugiert bleibt, also einer stetigen Biegung fähig sind, die *associierten* Flächen

baren Flächen angewandten Methoden. Ein ausgezeichnetes Beispiel für diesen Fall bietet ausser den soeben erwähnten Flächen die aus den ein konjugiertes System geodätischer Linien enthaltenden *Voss*schen[232]) Flächen (III D 5, Nr. **39**) bestehende Gruppe (spezielles Beispiel einer Gruppe von Schraubenflächen bei *Stäckel*[233])); sowie die gleich zu betrachtenden *Translationsflächen.*

26. Die Translationsflächen, vgl. III D 5, Nr. **6**. Mit den Flächen:

$$x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

bei denen U, V nur von u, resp. v abhängige Funktionen sind, scheint sich zuerst *Peterson*[234]) beschäftigt zu haben. Damit eine isometrische Translationsfläche existiere, müssen die Quadrate der Ableitungen der U, V je einer homogenen linearen Gleichung mit gewissen Koeffizienten genügen[235]).

Insbesondere können auch stetige Biegungen, bei denen das kon-

---

(siehe Nr. **32** des Textes) derjenigen, deren Krümmungsmass in Haupttangentenkurvenparametern von der Form $-\frac{1}{(u+v)^2}$ ist.

232) *A. Voss,* Über diejenigen Flächen, auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden, München, Ber. 1888, p. 96; *E. Cosserat,* Toulouse Ann. 7 (1893), Nr. 56; *L. Bianchi,* Roma Lincei Rend. (5) 1 (1892), p. 41. Durch die Betrachtung gewisser Strahlensysteme gelangte *C. Guichard* zu denselben Flächen, Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables, Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 333; ferner: Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées, Paris, C. R. 110 (1890), p. 995; Sur la déformation des surfaces, J. de math. (5) 2 (1896), p. 174. Man vgl. auch die weitergehenden Untersuchungen von *Guichard,* Sur les réseaux conjugués, dont les courbes d'*un* système sont géodésiques, Paris, C. R. 128 (1899), p. 599, Sur les surfaces de *M. Voss,* Paris, C. R. 129 (1899), p. 23, sowie *Darboux,* Leçons 4, p. 101. Übrigens liefern diese stetigen Biegungen nicht immer verschiedene Flächen. Unter den Minimalflächen lässt nur die gemeine Schraubenfläche ein konjugiertes System geodätischer Kurven zu, aber auf unendlich viele Arten, vgl. *A. Razzaboni,* Sulle superficie, sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato, Bologna Mem. (4) 9 (1889), p. 765.

233) *P. Stäckel,* Über Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 283. Die Klasse der *Voss*'schen Flächen wird übrigens auch schon von *Peterson* (*Peterson*, p. 66) erwähnt.

234) *Peterson*, p. 68 ff.

235) *Peterson*, ibid. p. 69. Zu der Fläche

$$x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3$$

gehört dann stets auch:

$$X = \lambda U_1 + \frac{V_1}{\lambda}, \quad Y = \mu U_2 + \frac{V_2}{\mu}, \quad Z = \nu U_3 + \frac{V_3}{\nu}$$

mit geeigneten konstanten Werten der λ, μ, ν.

jugierte System der „erzeugenden Kurven" sich erhält, vorhanden sein, so bei der von *Peterson* angegebenen Gruppe:

$$x = \int \sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}\, dv$$
$$y = \int \sqrt{1 - U'^2 a^2}\, du$$
$$z = aU + \frac{V}{a}$$

mit dem Biegungsparameter a.[236])

Für die Auffindung einfacher Untergruppen der Biegung scheint sich überhaupt noch ein weites Gebiet zu eröffnen. Es seien hier nur noch die Gruppe von *tetraedralen Flächen*:

$$x = A\,(a+u)^{3/2}\,(a+v)^{3/2}$$
$$y = B\,(b+u)^{3/2}\,(b+v)^{3/2}$$
$$z = C\,(c+u)^{3/2}\,(c+v)^{3/2}$$

mit den Bedingungen:

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = m_i; \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

(wo die m_i gegebene Konstanten)[237]), sodann die Biegungen der Flächen zweiten Grades erwähnt, welche *Peterson*[238]) aus den stetigen Deformationen der allgemeinen Flächenklasse

$$x = UV, \quad y = UV_1, \quad z = U_1$$

herleitet.

27. Die Minimalflächen. Über die allgemeine Theorie der *Minimalflächen* vgl. man III D 5, Nrr. **19—23.**

Die Translationsfläche F:

$$x = U_1 + V_1$$
$$y = U_2 + V_2$$
$$z = U_3 + V_3$$

ist unter den Bedingungen

---

236) In etwas anderer Form bei *Peterson,* p. 71; siehe auch *L. Bianchi,* Giorn. di mat. 16 (1878), p. 267. Man sehe ferner die ausführlichen Untersuchungen über die Biegung der Translationsflächen von *G. Pirondini* (1889); Ann. di mat. (2) 17 (1890), p. 228; Translationsflächen mit ebenen Erzeugenden bilden nur dann eine stetige Gruppe dieser Art, wenn die Ebenen der Kurven auf einander senkrecht stehen; *P. Adam,* Paris soc. math. Bull. 23 (1895), p. 204; vgl. auch *P. Stäckel,* Math. Ann. 44 (1893) p. 564.

237) *G. Tzitzéica,* Paris, C. R. 128 (1899), p. 1276; *Th. Egorow,* ibid. 132 (1901), p. 302.

238) *Peterson,* p. 72; vgl. *R. Mlodzieiowski,* Sur la déformation des surfaces, Paris soc. math. Bull. (2) 15 (1891), p. 97.

$$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0, \quad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0$$

eine Minimalfläche, und umgekehrt lassen sich auch *alle* Minimalflächen auf diese Weise ausdrücken. Alsdann sind aber auch

$$X = e^{i\alpha} U_1 + e^{-i\alpha} V_1$$
$$Y = e^{i\alpha} U_2 + e^{-i\alpha} V_2$$
$$Z = e^{i\alpha} U_3 + e^{-i\alpha} V_3$$

die Koordinaten einer durch stetige Biegung aus F hervorgehenden Gruppe *associierter* Minimalflächen mit dem Biegungsparameter α, und hierdurch sind zugleich *alle* zu der gegebenen Fläche F isometrischen Minimalflächen gegeben[239]).

Insbesondere entsteht für $\alpha = \pi/2$ *Bonnet's*[240]) *konjugierte* Minimalfläche mit den Koordinaten:

$$x_1 = i\,(U_1 - V_1)$$
$$y_1 = i\,(U_2 - V_2)$$
$$z_1 = i\,(U_3 - V_3),$$

und es wird vermöge der Gleichungen

$$X = x\cos\alpha + x_1 \sin\alpha$$
$$Y = y\cos\alpha + y_1 \sin\alpha$$
$$Z = z\cos\alpha + z_1 \sin\alpha:$$
$$dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = ds^2 \cos^2\alpha,$$

d. h. korrespondierende Tangenten associierter Minimalflächen bilden einen *konstanten* Winkel mit einander. Bei dieser merkwürdigen stetigen Biegung beschreibt jeder Punkt der Gruppe eine *Ellipse*, und nach *Darboux* ist dies der einzige Fall, in dem bei einer Biegungsgruppe überhaupt Kegelschnitte entstehen können[241]).

Bour[242]) untersuchte die zu *Rotationsflächen* isometrischen Minimal-

239) Nach *O. Bonnet*, J. éc. polyt. cah. 42, p. 8, 73, sind zwei Flächen, die isometrisch mit parallelen Tangentenebenen einander sich zuordnen lassen, immer Minimalflächen (Nr. 12); umgekehrt lassen sich zwei isometrische Minimalflächen immer in eine solche Lage bringen, dass sie dasselbe sphärische Bild besitzen, denn diese Abbildungen sind konform und zugleich müssen in korrespondierenden Punkten die Hauptkrümmungshalbmesser denselben Wert besitzen. Die Formeln für X, Y, Z im Texte giebt schon *Peterson*, p. 67 u. 72, allerdings ohne den von *H. A. Schwarz*, Miscellen aus dem Gebiet der Minimalflächen, J. f. Math. 80 (1875), p. 286 gegebenen Beweis, dass damit *alle* Minimalflächen erschöpft sind.

240) *O. Bonnet*, Paris, C. R. 37 (1853), p. 529; surface adjointe bei *Darboux*, Leçons 1, p. 323.

241) *Darboux*, Leçons p. 332; vgl. eine Bemerkung von *P. Stäckel*, Deutsche Math.-Verein. 1 (1892), p. 70.

242) *E. Bour*, J. éc. polyt. cah. 39, p. 99; daselbst auch p. 103 die endlichen Gleichungen dieser Minimalflächen.

flächen; bei ihnen werden die Krümmungslinien unter konstantem Winkel von den Bildern der Meridiankurven geschnitten. Nach *Schwarz*[243]) muss für diese Flächen die Funktion $F(s)$ in den *Weierstrass*'schen Formeln (vgl. III D 5, Nr. **21**) von der Form Cs^m (wo m eine reelle Konstante) sein. Die Bedingung, dass eine Fläche überhaupt *isometrisch ist zu einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung*, ist nach *Raffy*[244]) in invarianter Form:

$$\Delta_2 \log (h^2 - k) = 4k.$$

II. Die Flächen konstanter von Null verschiedener Krümmung.

28. Die Flächen konstanten Krümmungsmasses (III D 5, Nrr. **32**—**35**). Die Flächen $k = \text{const.}$ haben in Bezug auf ein geodätisches Polarkoordinatensystem von *Gauss* (III D 5, Nr. **15**) das Längenelement[245]):

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \frac{u}{R}\, dv^2; \quad k = \frac{1}{R^2}$$

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \text{hyp.} \left(\frac{u}{R}\right) dv^2; \quad k = \frac{-1}{R^2}.$$

Schon *Minding*[246]) bestimmte die Rotationsflächen konstanter Krüm-

243) *H. A. Schwarz,* Miscellen, J. f. Math. 80 (1875), p. 296; dort auch eine synthetische Untersuchung über die Isometrie der Minimalflächen zu Rotationsflächen.

244) *L. Raffy,* Sur une transformation des formules de *Codazzi* et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante; Paris soc. math. Bull. 20 (1892), p. 47. Nach *Bianchi* (*Bianchi,* p. 38) ist für $h = 0$ die betreffende Bedingung zuerst von *G. Ricci* gegeben: Eine Fläche ist nur dann isometrisch zu einer Minimalfläche, wenn ihr ds^2 durch Multiplikation mit $\sqrt{-k}$ in das einer Developpabelen übergeht. — Man vgl. damit analoge Untersuchungen von *L. Raffy* über *Spiralflächen*, Paris, C. R. 112 (1891), p. 1850; Paris soc. math. Bull. 19 (1891), p. 65 und J. éc. norm. (3) 9 (1892), p. 150.

245) Eine Fläche mit konstantem k ist nach *Cauchy* bestimmt durch einen ihrer *Streifen* (II A 5, Nr. **34**); eine Ausnahme findet nur statt, wenn die Tangentenebenen des Streifens mit den Schmiegungsebenen seiner Kurve zusammenfallen; für $k > 0$ ist eine reelle Auflösung dann unmöglich; für $k < 0$ giebt es ∞ viele, wenn die Torsion der Kurve konstant ist. Jedes Paar von reellen Kurven mit den Torsionen $+1$ und -1, die von einem Punkte mit gemeinsamen Schmiegungsebenen ausgehen, bestimmt eine solche Fläche; vgl. *A. V. Bäcklund,* Lunds Universitets Årsskrift 19 (1883), p. 19; *Bianchi,* Roma Lincei Rend. (1894); *Bianchi,* p. 446.

246) *Minding,* J. f. Math. 19 (1839), p. 378, in völliger Ausführung allerdings nur für $k = -1$; vgl. indes Bd. 18, p. 367. *Alle* Fälle $k = \text{const.}$ bei *Liouville,* in den Applications (1850), p. 597.

mung; mit Ausnahme der *Kugel* und der *Pseudosphäre* (Rotationsfläche der Traktrix) sind sie durch elliptische Funktionen darstellbar. Wählt man für $k = -1/R^2$ zu Koordinaten die zu einer geodätischen $u = 0$ senkrechten geodätischen Linien $v = \text{const.}$, und deren Orthogonaltrajektorien $u = \text{const.}$, so ist das Längenelement:

$$(1) \qquad ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 \text{hyp.}\, u\, dv^2)$$

(hyperbolischer Typus von *Beltrami*)[247]; den elliptischen Typus bildet das auf ein *Gauss*'schen Polarkoordinatensystem bezogene Element:

$$(2) \qquad ds^2 = R^2 (du^2 + \sin^2 \text{hyp.}\, u\, dv^2);$$

der parabolische endlich:

$$(3) \qquad ds^2 = R^2 (du^2 + e^{2u} dv^2)$$

entspricht dem Falle, wo statt der geodätischen Linie $u = 0$ bei 1) eine Kurve von der konstanten geodätischen Krümmung $1 : R$ (ein *Grenzkreis*)[248] gesetzt ist.

Die entsprechenden Rotationsflächen negativer konstanter Krümmung zeigen bei (1), (2) eine kegelförmige resp. hyperbolische Gestalt; im Falle (3) ergiebt sich die Traktrix. Diese drei Typen sind zwar nach Nr. **15** isometrisch, aber natürlich nicht so, dass etwa die Parallelkreise dabei zugeordnete Linien sein können. — Die Rotationsflächen $k = 1/R^2$ sind von spindelförmigem oder ringförmigem Typus[249].

Die durch *Bour's* und *Minding's*[250] Arbeiten implicite bekannten *Schraubenflächen* $k = \text{const.}$ bestimmte zuerst *Dini*[251] vollständig. *Enneper*[252] stellte sich die Aufgabe, die Flächen $k = \text{const.}$ mit einem System ebener Krümmungslinien zu bestimmen; die Ebenen der letzteren gehen durch eine Axe, die Krümmungslinien des anderen Systems liegen auf Kugeln, deren Centra sich auf dieser Axe befinden. Auch diese *Enneper*'schen Flächen (näher untersucht in den

---

247) *E. Beltrami,* Sulla superficie di rotazione, che serve di tipe alle superficie pseudosferiche, Giorn. di mat. 10 (1872), p. 147.

248) Der Zusammenhang dieser speziellen Abbildungen mit den Fragen der *nichteuklidischen Geometrie* kann hier nicht weiter berührt werden, man vgl. III A 1.

249) Vgl. z. B. *Bianchi,* p. 193.

250) Die ∞^2 zu einer Kugel isometrischen Schraubenflächen bei *Minding,* J. f. Math. 19, p. 376.

251) *U. Dini,* Ann. di mat. (2) 7 (1865), p. 25; vgl. auch die Angaben bei *Bianchi,* p. 466.

252) *A. Enneper,* Analytisch-geometr. Untersuchungen, Gött. Nachr. 1868, p. 258, 421.

Dissertationen von *Bockwoldt*[253]) und *Lenz*[254]) führen auf elliptische Funktionen. Schwieriger ist das von *Enneper* nicht völlig behandelte Problem der Flächen mit *einem* System sphärischer Krümmungslinien, das von *Dobriner*[255]) mit Hülfe der Thetafunktionen von zwei Variabeln auf Quadraturen zurückgeführt wurde; auch hier liegen die Centra der zugehörigen Kugeln auf einer Geraden.

29. Die Flächen konstanter negativer Krümmung. Vgl. III D 5, Nr. **35**. Da die *allgemeine* Lösung der partiellen Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung sich bisher nicht hat finden lassen, so richtete sich die weitere Untersuchung der Isometrie und Biegung der Flächen konstanten Krümmungsmaasses auf das *Transformationsproblem*, d. h. die Aufgabe, aus *einer* bekannten Fläche dieser Art *neue* durch explicite Prozesse zu gewinnen.

Von besonderer Bedeutung für die Transformation der Flächen eines *negativen* konstanten k ist der von *A. Ribaucour* 1870 gefundene Satz[256]), dass die in den Tangentenebenen der Fläche $k = -\frac{1}{R^2}$ um den Berührungspunkt mit R beschriebenen Kreise ein ∞^1 System von Flächen derselben Krümmung zu Normalflächen haben[257]).

---

253) *G. Bockwoldt*, Über die *Enneper*'schen Flächen mit konstantem positivem Krümmungsmass. Diss. Göttingen 1876.

254) *E. Lenz*, Diss. Göttingen 1879, Fall $k < 0$. Man vgl. *Bianchi*'s Untersuchung, Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 175; ein von *Enneper* nicht behandelter elementarer Grenzfall bei *Th. Kuen*, München, Ber. 1884, p. 193.

255) *H. Dobriner*, Acta math. 9 (1886), p. 73; vgl. *Darboux*, Leçons 3, p. 447.

256) *A. Ribaucour*, Paris, C. R. 70 (1870), p. 380; Beweis bei *Darboux*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 14; Leçons 3, p. 429.

257) Allgemeiner wird von *Ribaucour* 1876 (J. de math. [4] 7 [1891], p. 5 und p. 219) das System der Kurven in der Tangentenebene einer Fläche F untersucht, die eine *Normalenkongruenz* bilden. Diese Eigenschaft geht bei der Biegung der Fläche nicht verloren. Sind die Kurven nach Gestalt und Lage in der Tangentenebene unveränderlich, und genügen sie einer gewissen Differentialgleichung (ibid. p. 255), so sind die Orthogonalflächen von konstanter Krümmung; eine spezielle Lösung für $k = \text{const.}$ ist der Kreis (p. 251). Wir erwähnen zugleich die *Untersuchungen über dreifache Orthogonalsysteme* (III D 6 b), in denen ein System von Flächen mit konstantem k gebildet wird, insbesondere *Bianchi*'s Arbeiten, Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 175; 19 (1891), p. 187; siehe auch *Bianchi*, p. 529 ff. Ein besonders einfaches System dieser Art ist das von Schraubenflächen gebildete (*Bianchi*, p. 545); zwei der Flächenfamilien sind von konstanter negativer, die dritte von konstanter positiver Krümmung.

Thatsächlich aber knüpft die weitere Entwickelung der Transformationstheorie an eine Arbeit von *Bianchi* an[258]), die übrigens ihrem Grundgedanken nach wieder auf *Weingarten*'s Theorem über die W-Flächen beruht (vgl. Nr. **31**). Jede Fläche mit negativem konstantem k kann angesehen werden als die eine Evolutenschale (III D 5, Nrr. 8 ff.) einer W-Fläche, deren Hauptkrümmungsradien konstante Differenz haben: die zweite Evolutenschale hat dann die nämliche konstante Krümmung. Wesentlich ist nun *Bianchi*'s Bemerkung, dass man nicht allein zu jeder Fläche F *eine* neue, sondern ∞^1 finden kann. In der That bleibt die Form 3) der Nr. **28** des Längenelementes der Fläche F ungeändert durch die Substitutionen:

$$e^{-u'} = e^{-u} : N$$
$$v' = (v - c) : N$$
$$N = e^{-2u} + (v - c)^2$$

mit der *willkürlichen Konstanten* c. Die Tangenten der Kurven $v =$ const. berühren eine zweite Fläche F' (F und F' sind die Evoluten des zu den Tangenten normalen Flächensystems W), und F' hat wieder das Längenelement (3) der Nr. **28**. Man erhält also wirklich ∞^1 Flächen F'. Die Bemerkung von *Lie*[259]), dass man auf allen diesen Flächen F' die geodätischen Linien durch *Quadratur* finden kann, gestattet, den *Bianchi*'schen Prozess beliebig oft zu wiederholen.

Anstatt der *geodätischen* Linien kann man sich auch der Krümmungslinien von F bedienen. Ist $k = -1$, so wird:

$$(1) \qquad ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2.$$

Zieht man nun, um an *Ribaucour*'s Satz[260]) anzuknüpfen, unter dem Winkel θ mit der Kurve $u =$ const. vom Punkte P der Fläche F die Tangente von der Länge *Eins*, so beschreibt der Endpunkt P' derselben eine Fläche F_0 von derselben Krümmung -1, wenn[261]):

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = \cos \omega \sin \theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = -\sin \omega \cos \theta, \end{cases}$$

---

258) *Bianchi*, Diss. Pisa Ann. 2 (1879), p. 285; Math. Ann. 16 (1879), p. 577.

259) Allgemeiner auf allen Flächen W, *Lie*, Arch. for Math. 4 (1879), p. 345, 507; vgl. *Weingarten*, J. f. Math. 103 (1888), p. 184. Für die Krümmungslinien der Flächen W gilt bekanntlich dasselbe (III D 5, Nr. **18**).

260) Fussn. 145.

261) *Darboux*, Leçons 3, p. 432.

und damit erhält man ∞^1 Lösungen θ, da das System der Gleichungen (2) wegen der vorausgesetzten konstanten Krümmung -1 von F, oder

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega \tag{2a}$$

unbeschränkt integrabel ist. Führt man an Stelle der u, v die Variabeln α, β ein:

$$2\alpha = u + v, \qquad 2\beta = u - v,$$

so wird:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin\omega\cos\omega \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin\theta\cos\theta; \end{cases} \tag{2b}$$

das Längenelement von F_0 wird gegeben durch:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2\theta\,du^2 + \sin^2\theta\,dv^2 \\ &= d\alpha^2 + 2\,d\alpha\,d\beta\cos 2\theta + d\beta^2, \end{aligned}$$

d. h.: F_0 ist ebenso wie F durch die Kurven u, v auf die Krümmungslinien, durch die Kurven α, β auf die Haupttangentenkurven bezogen[262]).

Auch diese Konstruktion lässt sich verallgemeinern, indem man den Radius des so eben erwähnten *Ribaucour*'schen Kreises nicht gleich -1, sondern gleich einer Konstanten ϱ wählt, während die Tangentenebene der Fläche F' in seinem Endpunkte P' die Tangentenebene von F längs PP' unter einem konstanten Winkel, dessen Cotangente $\lambda : \varrho$ ist, schneidet. Man erhält dann, falls wegen der aus den Integrabilitätsbedingungen folgenden Gleichung

$$\lambda^2 + \varrho^2 = 1$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \varrho &= \cos\sigma \\ \lambda &= \sin\sigma, \end{aligned}$$

die verallgemeinerten Gleichungen[263]):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\alpha}(\theta + \omega) = \frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\theta + \omega) \\ \frac{\partial}{\partial\beta}(\theta - \omega) = \frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\theta + \omega). \end{cases} \tag{4}$$

Dies ist *Bäcklund*'s[264]) *Transformation* B_σ, welche *zwei* willkürliche

262) *Darboux*, ibid., p. 428.

263) Vgl. z. B. *Darboux*, Leçons 3, p. 434.

264) *A. V. Bäcklund*, Om ytor met konstant krökning, Lund's Universitets Årsskrift 19 (1883).

Konstanten einführt; sie geht für $\sigma = 0$ wieder in die *Bianchi'sche Transformation* B_0 (2) über[265]).

Bäcklund hat übrigens seine Transformation auf einem ganz andern Wege gefunden[266]). Man kann sie nach *Darboux*[267]) aus der *Bianchi*'schen mit *Lie*'s Transformation[268]) zusammensetzen. Die letztere besteht darin, dass zu jeder Lösung $\omega = \varphi(\alpha\beta)$ der Gleichung (2b) eine zweite:

$$\omega = \varphi\left(\alpha\varrho, \frac{\beta}{\varrho}\right)$$

mit der Konstanten ϱ, oder zu

$$\omega = \psi(u, v)$$

die Lösung:

$$\omega = \psi\left(\frac{u + v\sin\alpha}{\cos\alpha}, \frac{v + u\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

gehört.

Die beliebig wiederholte Anwendung dieser Transformation liefert unbegrenzt viele neue Flächen $k = -1$ mit stets wachsender Zahl von willkürlichen Konstanten.

Darboux hat diesen Prozess vollständig ausgeführt[269]). Seine Untersuchungen führen zu dem folgenden Satze:

Kann man eine Fläche $k = -1$ nebst[270]) der Gruppe der aus ihr durch *Lie*'s Transformation entstehenden bestimmen, so beruht die weitere Anwendung der *Bianchi*'schen, *Bäcklund*'schen und *Lie*schen Transformationen auf die entstandenen Flächen *nur auf Differentiation und Elimination.*

In etwas anderer Form ist dieser Prozess von *Bianchi*[271]) unter direkter Beziehung auf die Theorie der Strahlensysteme und den Algorithmus der von ihm als L_σ und B_σ bezeichneten Transformationen durchgeführt. Der *Darboux*'sche Satz[272]) von der Zusammensetzung der *Bäcklund*'schen Transformation aus der von *Lie* und *Bianchi* erhält dann die Gestalt:

---

265) B_0 ist *Bianchi's komplementare* Transformation, Math. Ann. 16, p. 577.

266) *Bäcklund*, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Math. Ann. 14 (1880), p. 285; 19 (1882), p. 387.

267) *Darboux*, Leçons 3, p. 438.

268) *Lie*, Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 510, vgl. *Bianchi*, p. 459.

269) *Darboux*, Paris, C. R. 97; J. éc. norm. (3) 7 (1890), p. 1, vgl. Leçons 3, p. 458 ff.

270) Hierzu ist wieder die Lösung einer *Riccati*'schen Gleichung erforderlich, deren explicite Form bei *Darboux*, Leçons 3, p. 461.

271) *Bianchi*, p. 451.

272) Fussnote 267.

$$B_\sigma = L_\sigma B_0 L_\sigma^{-1};$$

eine wichtige Rolle spielt dabei der *Bianchi'sche Vertauschbarkeitssatz:* Ist

$$F_1 = F B_{\sigma_1}, \quad F_2 = F B_{\sigma_2},$$

so ist:

$$F_3 = B_{\sigma_1} B'_{\sigma_2} = F B_{\sigma_2} B'_{\sigma_1},$$

d. h. es giebt zwei bestimmte Transformationen, B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, welche F_1 und F_2 in *dieselbe* Fläche F_3 verwandeln[273]). Eine besonders anschauliche Darstellung gewinnt dieser Transformationsprozess, wenn man die beiden Flächen F und die aus ihr durch B_0 hervorgehende F_0 als Brennflächen des *pseudosphärischen Strahlensystems* PP_0 auffasst (Nr. **13**; III D 5, Nr. **35**).

30. Die Flächen konstanter positiver Krümmung. Zu jeder Fläche F konstanter positiver Krümmung liefert ein schon 1878 von *Hazzidakis*[274]) gegebenes Verfahren durch Quadratur eine neue Fläche derselben Art. Sind nämlich die geodätischen Linien der Fläche durch die in den Parametern u, v lineare Gleichung $au + bv + c = 0$ dargestellt, so liefern die Quadraturen:

$$dx_1 = (L du + M dv)\, S,$$
$$dy_1 = (M du + N dv)\, S,$$
$$dz_1 = ((Lu + Mv)\, du + (Mu + Nv)\, dv)\, S,$$
$$S = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

eine Fläche derselben konstanten Krümmung. Die geometrische Deutung dieser Transformation gab wiederum *Lie*[275]). Die Haupttangentenkurven von F zerlegen F selbst sowie ihr sphärisches Bild auf der *Gauss*'schen Kugel *in infinitesimale Rhomben*[276]) (III D 5, Nr. **38**), und aus jeder Einteilung dieser Art auf der Kugel folgt durch Quadratur eine Fläche F. Man erhält daher durch „Aufwickelung" der Fläche F auf die Kugel vermöge des Systems ihrer Haupttangentenkurven eine *neue* Einteilung der Kugel, welche eine zugehörige Fläche F' liefert.

---

273) *Bianchi,* p. 461 ff.

274) *J. N. Hazzidakis*, Über einige Eigenschaften der Flächen von konstantem Krümmungsmass, J. f. Math. 88 (1880), p. 71; vgl. auch *J. Weingarten*, Festschrift d. techn. Hochschule Berlin 1884, p. 39.

275) *Lie,* Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung, Archiv for Math. og Naturv. 4 (1879), p. 345 und 4, p. 355.

276) Dies ist der *Dini*'sche Satz: *Dini,* Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni, Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 175

Aber dieser Prozess ist ein *reziproker* und daher zur Gewinnung neuer Flächen nicht brauchbar[277]).

Die in der vorigen Nummer gebildeten Transformationen *Bianchi*'s und *Lie*'s würden dagegen für Flächen $k = +1$ den Durchgang durchs Imaginäre erfordern. Neuerdings hat aber *Bianchi* auch für diesen Fall eine *reelle* Darstellung gegeben[278])

Schon *Beltrami*[279]) hatte gezeigt, dass die Normalflächen F einer Normalenkongruenz, deren Strahlen mit den rechtwinkligen Triëdern des Koordinatensystems auf einer Ausgangsfläche (superficie di partenza) F_0 fest verbunden sind, bei allen Biegungen der letzteren in die Normalenflächen der deformierten Kongruenz übergehen. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn die Kongruenz aus den Tangenten derjenigen geodätischen Linien einer zu einer Rotationsfläche isometrischen besteht, welche den Meridianen entsprechen; die Normalenflächen sind dann die Flächen *Weingarten*'s. *Guichard*[280]) zeigte nun, dass für ein Rotationsparaboloid F_0 die Kongruenz der Brennpunktsstrahlen bei den Deformationen der F_0 in eine Normalenkongruenz übergeht, deren aus dem Brennpunkte entspringende Orthogonalfläche eine Minimalfläche ist[281]). Bei der Ausführung derselben Konstruktion am verlängerten Rotationsellipsoid, resp. zweischaligen Rotationshyperboloid ergiebt sich dagegen eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung. Da die *Schar der Parallelflächen zu einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung* auch eine Fläche konstanter

277) Bei dieser Transformation entsprechen die Krümmungslinien und Haupttangentenkurven von F_1 denen von F. Übrigens erkennt man den involutorischen Charakter von *Hazzidakis*' Transformation einfacher dadurch, dass man als Fundamentalgrössen von zwei Flächen mit konstantem $k = +1$ die beiden Systeme

$$E = \sin^2 h\theta,\ F = 0,\ G = \cos^2 h\theta,\ R_1 = \operatorname{cotg} h\theta,\ M = 0,\ R_2 = \operatorname{tg} h\theta$$

$$E' = \cos^2 h\theta,\ F' = 0,\ G' = \sin^2 h\theta,\ R_1' = \operatorname{tg} h\theta,\ M_1 = 0,\ R_2' = \operatorname{cotg} h\theta$$

in Bezug auf Krümmungslinienparameter u, v ansehen kann, wenn

$$\Delta_2 \theta + \cos h\theta \sin h\theta = 0;$$

den geodätischen Linien der einen entsprechen die Schattenlinien der andern.

278) *Bianchi*, Sopra le superficie a curvatura costante positiva, Roma Lincei Rend. (5) 8 (1899), p. 141, 223, 371, 484.

279) *Beltrami*, Ricerche di analisi applicata, Giorn. di mat. 2 (1864), p. 281; bei *Bianchi*, p. 270 wird dieser Satz auch auf allgemeinere Deformationen der Ausgangsfläche erweitert.

280) *C. Guichard*, Sur la déformation des quadriques de révolution, Paris, C. R. 128 (1899), p. 232. Vgl. *G. Tzitzéica*, Bull. sciences math. 23 (1899), p. 153.

281) *Bianchi* schliesst hieran eine Transformation der Minimalflächen in Analogie mit der Transformation der Flächen konstanter Krümmung, Roma Lincei Rend. (5) 8 (1899), p. 151.

positiver Krümmung enthält[282]), so lässt sich nach *Bianchi*[283]) umgekehrt jede Fläche mit konstantem $k = +1$ auf ∞^3 Arten aus einer dieser Rotationsflächen zweiten Grades F_0 herleiten. Dabei zeigt sich, dass zu jeder Fläche F, deren $k = +1$ ist, noch eine *zweite* F' (durch Spiegelung der Kongruenz an F_0) gefunden werden kann. In dem Übergang von F zu F' besteht jetzt die neue Transformation *Bianchi*'s, welche aus F zunächst ∞^3 Flächen F_0, also auch ∞^3 Flächen F', vermöge eines unbeschränkt integrabelen Systems linearer homogener partieller Differentialgleichungen liefert[284]) (II A 5, Nr. **14**).

Da ähnliche Untersuchungen auch für Flächen negativer konstanter Krümmung gelten, muss natürlich ein naher Zusammenhang mit der *Bäcklund*'schen Transformation bestehen[285]). In der That zeigt sich nun auch, dass diese neue Transformation *Bianchi*'s in *zwei successive imaginäre Transformationen dieser Art* zerlegt werden kann[286]). Insbesondere gilt auch hier der Satz: Gelingt für die vorgelegte Fläche F die *vollständige* Integration des Systems der Gleichungen, welche zur Transformation von F in F_1 notwendig sind, so erfordert *die fortgesetzte* Anwendung des Prozesses auf jede gewonnene F_1 nur Eliminationen und Differentiationen. Damit ist auch für die Flächen konstanter positiver Krümmung eine ebenso durchsichtige geometrische Transformation erreicht, wie für die von negativer[287]).

3) Untersuchung vollständiger isometrischer Gruppen.

31. Vollständige Systeme isometrischer Flächen. Kennt man für eine Fläche *alle* zu ihr isometrischen, so entsteht eine *isometrische Gruppe* (Nr. 2), in dem Sinne, dass man zu *jeder* Fläche derselben *alle* isometrischen kennt; man kann als *Typus der Gruppe* die einfachsten

---

282) *O. Bonnet,* Note sur une propriété de maximum relative à la sphère, Nouv. Ann. de math. 12 (1853), p. 443 (III D 5, Nr. **35**).

283) *Bianchi,* Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, Ann. di mat. (3) 3 (1899), p. 185.

284) *Bianchi,* ibid. p. 49, 66 (Citat nach dem Separatabzug).

285) *Bianchi,* ibid. p. 21.

286) *Bianchi,* ibid. p. 82.

287) Auf weitere hiermit in Verbindung stehende Untersuchungen *Bianchi*'s hier einzugehen, ist nicht möglich, vgl. Ann. di mat. (3) 5 (1901), p. 166, sowie den kurzen Abriss der neuen Transformation in *Bianchi,* p. 641. — Übrigens hat fast zu derselben Zeit *Darboux* in den Paris. C. R. (Ann. éc. norm. (3) 6 (1899), p. 465) die *Guichard*'schen Sätze im Sinne der Transformationstheorie verwandt und so ähnliche Resultate wie *Bianchi* hinsichtlich der Beziehungen zur *Bäcklund*'schen Transformation gewonnen.

der in ihr enthaltenen Flächen bezeichnen. Bis zum Jahre 1860, wo *Weingarten* seine Untersuchungen auf das Problem der Flächen richtete, für die eine solche vollständige Gruppe durch explicite Prozesse (Eliminationen und Quadraturen) gefunden werden kann, war nur die aus den Developpabelen bestehende Gruppe bekannt[288]).

Von nun an treten in Rücksicht auf die Ermittelung weiterer Gruppen die *Weingarten'schen Flächen W* hervor, bei denen eine Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 stattfindet (III D 5, Nr. **17**). Wählt man die Variabelen u, v so, dass $v = \text{const.}$ die *eine* Schar der Krümmungslinien, $u = \text{const.}$ die Kurven sind, auf denen der zugehörige Krümmungsradius R_1 konstant ist, so ist das Längenelement des von den Mittelpunkten der Krümmungskreise R_1 gebildeten Mantels der *Centrafläche*[289]) der W-Fläche:

$$ds^2 = dR_1^2 + (F(R_1))^2 dv^2, \tag{1}$$

wobei

$$F(R_1) = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}}$$

ist; d. h. dieser Mantel[290]) der Centrafläche der W-Fläche ist zu einer *Rotationsfläche* isometrisch, deren Meridiankurve *nur* von der Form der durch die für W-Flächen charakteristischen Relation zwischen R_1 und R_2 bestimmten Funktion $F(u_1)$ abhängt[291]). Und umgekehrt[292]) lässt *jede zur Rotationsfläche*

$$ds^2 = du_1^2 + (Fu_1)^2 dv^2 \tag{1a}$$

isometrische Fläche F sich als der eine Mantel der Evolute einer bestimmten Klasse von W-Flächen ansehen, wenn man setzt:

$$R_1 = u_1$$
$$\frac{1}{R_1 - R_2} = \frac{F'(u_1)}{F(u_1)}, \tag{2}$$

womit zugleich die Beziehung zwischen R_1 und R_2, d. h. das *Gesetz* der Klasse dieser W-Flächen durch Elimination von u_1 folgt. Eine

288) Die Bemerkung von *E. Bour*, J. éc. polyt., cah. 39 (1860), p. 13 in Betreff der Bestimmung *aller* zu einer Rotationsfläche isometrischen Flächen beruht auf einem Irrtum.

289) Auch Evolutenfläche, surface développée, superficie sviluppata (*U. Dini*, Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 25) (III D 5, Nr. 8).

290) Entsprechendes gilt natürlich für den andern Mantel, der allerdings bei den *Kanal-* oder *Röhrenflächen* in Wegfall kommt (III D 5, Nr. **17**).

291) *J. Weingarten*, Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, J. f. Math. 59 (1861), p. 382.

292) *Weingarten*, ibid. p. 388.

Ausnahme tritt nur dann ein, wenn *entweder* die in (1a) zu Grunde liegenden geodätischen Linien $v = \text{const.}$ von F *gerade* sind (also F Regelfläche ist), *oder* F developpabel ist[293]). Im zweiten Falle liegt eine besondere Aufgabe nicht vor; im ersten werden die zugehörigen W-Flächen von konstanter Krümmung. Bei negativem k ist die *typische Rotationsfläche* das *Catenoid* (III D 5, Nrr. **19, 26, 36**), und man muss zu den *Centra*flächen aller Flächen von negativem konstantem k noch die zum Catenoid isometrischen *Regelflächen*[294]) hinzufügen; bei positiver Krümmung sind die isometrischen Regelflächen imaginär.

Hierdurch ist die *Bestimmung sämtlicher zu einer gegebenen Rotationsfläche isometrischen Flächen* auf die *aller W-Flächen* einer *gegebenen Klasse* zurückgeführt. Diese Aufgabe aber reduziert sich vermöge der sphärischen Abbildung einer W-Fläche auf die *Ermittelung eines gewissen Koordinatensystems auf der Kugel*[295]). Ist nämlich

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 \tag{3}$$

das Längenelement der sphärischen Abbildung der auf ihre Krümmungslinien bezogenen W-Fläche, so wird nach *Weingarten*:

$$e = e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad g = e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}},$$

d. h. es ist die Aufgabe zu lösen, das Längenelement der Kugel auf *alle* Arten in die Gestalt

$$d\sigma^2 = \frac{du^2}{p^2} + \frac{dv^2}{(\varphi' p)^2} \tag{4}$$

zu setzen, wenn

$$\begin{cases} R_1 = \varphi(p) \\ R_2 = \varphi(p) - p\,(\varphi' p) \end{cases} \tag{5}$$

gesetzt wird. Und die zugehörige W-Fläche ist durch *Quadraturen* bestimmt, wenn das Kurvensystem auf der Kugel *bekannt* ist[296]); zugleich erhalten die *beiden* zugehörigen Centraflächen die Längenelemente:

$$ds_1^2 = g\,(R_1 - R_2)^2 dv^2 + dR_1^2 = p^2 dv^2 + (\varphi' p)^2 dp^2,$$
$$ds_2^2 = e\,(R_1 - R_2)^2 du^2 + dR_2^2 = (\varphi' p)^2 du^2 + (p\varphi'' p)^2 dp^2.$$

Diese allgemeinen Sätze geben sofort die Bestimmung einiger isometrischen Gruppen.

---

293) *Weingarten,* ibid. p. 390.

294) Vgl. *U. Dini,* Ann. di mat. (1) 7 (1865), p. 25. Es handelt sich also um die Regelflächen mit dem Längenelement $du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$.

295) *J. Weingarten,* J. f. Math. 62 (1863), p. 160.

296) Ist nur das Längenelement (4) gegeben, so hat man nach *Darboux* 3, p. 320 noch eine *Riccati*'sche Gleichung zu lösen.

Man kennt *erstens alle* Einteilungen der Kugel, bei denen

$$d\sigma^2 = dv^2 + g\,du^2$$

wird; sie werden von den grössten Kreisen $u =$ const. und ihren Orthogonalkurven gebildet. Hier ist also nach (4):

$$g = \frac{1}{p^2}, \quad \varphi'(p) = 1,$$

also:

$$R_1 = a + \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad R_2 = a;$$

man erhält die *W-Kanalflächen*, welche aber nur die triviale Gruppe der *Developpabelen* liefern.

Man kennt *zweitens* alle *isothermen* Teilungen der Kugel (III D 3, Nr. **20**), die zugehörigen *W*-Flächen sind die *Minimalflächen*. In diesem Falle sind — wie überhaupt bei allen Flächen mittlerer konstanter Krümmung — die beiden Mäntel der Centrafläche *zu einander isometrisch*, und die vollständige Gruppe ihrer isometrischen Flächen hat zum Typus die *Rotationsfläche der Evolute der Kettenlinie*[297] (III D 4, Nr. **27**).

Eine *dritte* Klasse fand *Weingarten*[298] durch die Bestimmung aller Koordinatensysteme des Längenelementes (III D 3, Nr. **15**)

$$ds^2 = \frac{du^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

auf der Kugel (Orthogonalsystem mit konstanter Summe resp. Differenz der geodätischen Abstände von zwei willkürlichen Kurven auf der Kugel); die zugehörige *W*-Fläche, für die

$$p = \sin\frac{\omega}{2}, \quad \varphi'(p) = \cos\frac{\omega}{2}$$

zu setzen ist, hat nach (5) das Gesetz:

$$2(R_2 - R_1) = \sin 2(R_1 + R_2).$$

Auch hier sind die beiden Evolutenmäntel zueinander isometrisch und der Typus der isometrischen Gruppe ist das *Rotationsparaboloid*[299].

297) Die Biegungen der Evolutenfläche der Umdrehungsfläche der Kettenlinie (Catenoid oder Alysseid nach *Bour*, J. éc. polyt., cah. 39, s. oben p. 422) untersucht *A. Razzaboni*, der unter der Annahme, dass für irgend eine Kurve C des Catenoids die gebogene Kurve C' vorgeschrieben ist, die zugehörige Minimalfläche bestimmt, deren Evolute die gedachte Fläche ist; in Übereinstimmung mit Nr. **19** ergeben sich dabei *zwei* Flächen, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 254.

298) *Weingarten*, J. f. Math. 62 (1862), p. 170; vgl. *O. Bonnet*, J. éc. polyt., cah. 42, p. 95; *Darboux*, Leçons 3, p. 322. Mit der wirklichen Biegung dieser Flächen beschäftigt sich *B. Calò*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 195.

299) Bei *Weingarten*, ibid. p. 171 erscheint als Typus die Flächengruppe:

$$x = \alpha u \sin\frac{v}{\alpha}, \quad y = \alpha u \cos\frac{v}{\alpha}, \quad z = \int\sqrt{1 - u^2 - \alpha^2}\,du,$$

Die geometrische Konstruktion dieser W-Flächen, deren explicite Gleichung bereits durch *Weingarten*[300]) gefunden wurde, gab *Darboux*[301]). Betrachtet man eine Translationsfläche T, deren erzeugende Kurven C und C_1 entgegengesetzt gleiche *konstante Torsion* haben, so bestimmen die Schnittlinien der Schmiegungsebenen von C und C' in jedem Punkte von T ein Strahlensystem, unter dessen Normalenflächen sich jene Flächen befinden. Und sind

$$\xi_1 + i\xi, \quad \eta_1 + i\eta, \quad \zeta_1 + i\zeta$$

drei Funktionen der komplexen Variabeln $u + iv$, die durch die Gleichung

$$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = c^2$$

verbunden sind, so liefern die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

bei *negativem reellem* $c = -1/k^2$ alle zu dem *Rotationsparaboloid*

$$z = \frac{k^2}{2}(x^2 + y^2)$$

isometrischen Flächen[302]).

Eine vierte Gruppe entsteht nach *Weingarten*[303]) durch die Anwendung eines *neuen Koordinatensystems*, bei dem u der Abstand der Tangentenebene, $2v$ das Quadrat der Entfernung ihres Berührungspunktes vom Anfang ist (III D 3, Nr. **35**). So ergiebt sich der Satz: Alle zu den Flächen des *Liouville*'schen Längenelementes (III D 3, Nr. **18**)

$$ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2)(\alpha^{2/3} + \beta^{2/3})$$

isometrischen können durch einen einfachen Prozess aus den Minimalflächen hergeleitet werden.

Von demselben Koordinatensysteme ausgehend — und hiermit beginnen die wesentlichsten neueren Fortschritte — zeigte *Weingarten* weiter, dass die Flächen[304]), für die

---

die für $\alpha = 1$ ein imaginäres Rotationsparaboloid liefert; *Darboux* erhält Leçons 3, p. 333 ein *reelles* dadurch, dass die willkürlichen Kurven auf der Kugel konjugiert imaginär genommen werden (s. unten p. 425).

300) *Weingarten*, ibid. Fussnote 308.

301) *Darboux*, Leçons 3, p. 373; auch 4, Note XI, p. 514 (III D 5, Nr. **17**).

302) Über die Bedeutung der Gleichungen bei reellen $c \gtrless 0$ siehe *Darboux*, Leçons 3, p. 372 und *Bianchi*, p. 330.

303) *Weingarten*, Über eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, Götting. Nachr. 1878, p. 28; sie bildete das erste Beispiel einer Gruppe, in der sich keine Rotationsfläche befindet.

304) *Weingarten*, Paris, C. R. 112 (1891), p. 607. Durch Einführung einer neuen Konstanten im Ansatz von *Weingarten* verallgemeinert *E. Goursat* da-

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(R_1 + R_2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} R_1 R_2 = 0,$$

wo φ eine gegebene Funktion der u, v ist, *die vollständige Gruppe der Flächen des Längenelementes*

$$(7) \qquad \left(d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right)^2 + 2u\, d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + 2v\left(d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\right)^2 = ds^2$$

bilden, und gewinnt durch den Ansatz

$$\varphi = uv - \frac{\beta}{2} u^2 - \frac{u^3}{3}$$

mittels Quadraturen *alle* zu den Flächen des Längenelementes

$$ds^2 = t^2 dv^2 + (t^2 - 1)\, dt^2$$

isometrischen Flächen mit der typischen reellen Rotationsfläche[299]):

$$x = \alpha t \cos\frac{v}{\alpha}, \quad y = \alpha t \sin\frac{v}{\alpha}, \quad z = \int \sqrt{t^2 - \alpha^2 - 1} \cdot dt.$$

Durch eine synthetische auf kinematischen Prinzipien beruhende Entwicklung erhält *Darboux*[305]) *Weingarten*'s partielle Differentialgleichung (6) aufs neue und verallgemeinert dessen Resultate für den Ansatz:

$$\varphi(u) = uv - \psi(u) - \frac{u^3}{3},$$

der sich auf die Flächen des Längenelementes

$$(8) \qquad ds^2 = dt^2 + 2(t + \psi'(v))\, dv^2$$

bezieht, womit die Bestimmung aller hierzu isometrischen Flächen auf die Lösung der *Laplace*'schen Gleichung (II A 5, Nr. 53)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi''(v)}{(1 + \alpha\beta)^2}$$

zurückgeführt wird. Bei geeigneter Annahme von $\psi(v)$ ergeben sich dann die bereits angeführten Fälle wieder, insbesondere auch die von *Baroni* schon früher behandelten[306]).

---

selbst p. 707, das Verfahren so, dass auch für unendlich viele Werte der Konstanten *a alle* Flächen des Längenelementes

$$ds^2 = du^2 + (u + av^2)\, dv^2$$

durch Quadratur mittels bekannter Methoden gefunden werden können. Man vgl. *E. Goursat,* Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionelle à la distance d'un point fixe un plan tangent, Americ. Journ. of math. 10 (1888), p. 187, sowie in Bezug auf die *Weingarten*'sche Gleichung (6) des Textes *E. Goursat,* Sur un théorème de *Weingarten,* et sur la théorie des surfaces applicables, Toulouse Ann. 5, E. p. 1 (1891).

305) *Darboux,* Leçons 4, p. 308 ff.

306) *E. Baroni,* Superficie in cui la somma dei raggi di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente, Giorn. di mat.

Insbesondere bemerkt *Darboux*[307]), dass das Paraboloid, das mit einer seiner Erzeugenden den imaginären Kreis berührt (paraboloide à plan directeur isotrope) unter den Flächen des Längenelementes (8) enthalten ist. Von nun an richten sich die Bemühungen der französischen Mathematiker insbesondere auf die allgemeinen Paraboloide. Wir erwähnen da *Thybaut*'s[308]), an die durch *Weingarten*'s Preisschrift veranlasste Verwendung der Lehre von den Strahlensystemen sich anschliessende Arbeit, welche das Paraboloid betrifft, dessen Axe den imaginären Kreis schneidet; nach *E. Cosserat*[309]) reduziert sich die Bestimmung seiner Flächengruppe auf das Problem der Flächen konstanter Krümmung.

Die neuesten Arbeiten von *Darboux* und *Guichard*[310]), welche mit den zu den *Rotationsflächen*, dann zu den *allgemeinen Flächen zweiten Grades* isometrischen sich beschäftigen, zeigen, dass das soeben erwähnte, allerdings bis jetzt nicht völlig gelöste, Problem durch die vielfachen Beziehungen, in die es mit scheinbar weit abliegenden Fragen tritt, eine neue Bedeutung erlangt hat; eine weitere Ausführung ist aber in Kürze hier nicht möglich.

D. Die infinitesimale Isometrie.

32. Infinitesimale Deformation und Isometrie der Flächen. Eine von Biegungsparametern stetig abhängende Gruppe isometrischer Flächen (Nr. **19**) besitzt unendlich kleine Deformationen, durch welche eine Fläche in eine benachbarte *gebogen* wird. Unter einer *unendlich kleinen, infinitesimalen Deformation* einer Fläche versteht man über-

---

28 (1890), p. 349; in Zusammenhang mit *P. Appell*'s Arbeit, Americ. Journ. of math. 10 (1888), p. 175. Eine Zusammenfassung der Resultate von *Darboux, Baroni, Goursat* giebt auch *L. Raffy,* vermöge eines fruchtbaren Theorems über Haupttangentenkurven: Sur la déformation générale des surfaces, Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 119.

307) *Darboux,* Leçons 4, p. 334.

308) *A. Thybaut,* Sur la déformation du paraboloide, J. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 45, s. Fussn. 133 und III D 5, Nr. **37**.

309) *E. Cosserat,* Paris, C. R. (1897), p. 741; vgl. auch *C. Guichard,* Paris, C. R. 126 (1898), p. 1616; 130 (1901), p. 398.

310) *C. Guichard*, Sur la déformation des quadriques de révolution, Paris, C. R. 128 (1898), p. 232; andere Sätze von *A. Thybaut,* C. R. 131 (1900), p. 932 und *C. Guichard,* C. R. 125 (1897), p. 596; 132 (1901), p. 398 beziehen sich auf die Ableitung neuer Deformationen aus bekannten der Flächen zweiten Grades. *Darboux*' Arbeiten sind zusammengestellt unter dem Titel: Sur la déformation des surfaces du second dégré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante, J. éc. norm. (3) 6 (1899), p. 465.

haupt den Prozess, durch den jedem Punkte $P(x, y, z)$ von F ein Punkt $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ von F':

$$\bar{x} = x + \varepsilon x_1, \quad \bar{y} = y + \varepsilon y_1, \quad \bar{z} = z + \varepsilon z_1$$

zugeordnet wird, wo ε eine unendlich kleine Konstante[311]). Wird überdies noch verlangt, dass

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$$

bis auf Glieder mit ε^2 (exclusive) ist, sodass

$$(2) \qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

sein muss, so hat man eine *infinitesimale Isometrie*[312]).

Dieser Prozess hat einen *grösseren Umfang* wie der der *infinitesimalen Biegung*. Denn bei der letzteren kann eine Kurve auf der Fläche nur dann ungeändert bleiben, wenn sie Haupttangentenkurve derselben ist (Nr. **19**). Dagegen ist es möglich, infinitesimale Isome-

---

311) Es ist eine wichtige Aufgabe, die Änderungen der wesentlichen Invarianten der Fläche bei infinitesimaler Deformation zu bestimmen. Schon *Jellett* (Dublin Trans. 22 (1854), p. 348) bestimmte $\delta \frac{1}{R_1 R_2}$ bei der infinitesimalen Isometrie; siehe auch *E. Beltrami,* Bologna Mem. (4) 3 (1882), p. 217, § 12; allgemein entwickeln *Ribaucour* (1876), J. de math. (4) 7 (1891), p. 237 und *E. Cosserat,* Toulouse Ann. 8, E. 2 (1894) die Variation von k und h. Siehe auch *E. Cesàro,* Teoria intrinseca delle deformazioni infinitesime, Napoli Rend. (2) 8 (1894), p. 149, insbes. p. 154.

Mit der Theorie der allgemeinsten Deformationen beschäftigen sich *A. Voss,* Über infinitesimale Flächendeformationen, Deutsche Math.-Verein. 4 (1895), p. 132; *E. Daniële,* Sulle deformazioni delle superficie flessibili ed estensibili, Torino Atti (2) 1 (1899), p. 25, der *Weingarten*'s Differentialgleichung (6) des Textes für diesen Fall erweitert. Teilweis inextensible Flächen betrachtet schon *Jellett* a. a. O. p. 362. Die Theorie der allgemeinen infinitesimalen Deformation ist übrigens in der *Mechanik* (IV 14, Nr. **16**) entstanden, man vergleiche:

L. Lecornu, Équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, J. éc. polyt. cah. 48 (1880), p. 1; *E. Beltrami,* Sul equilibrio delle superficie flessibili ed inestensibili, Bologna Mem. (4) 3 (1882), p. 218; *G. Morera,* Roma Lincei Trans. (3) 7 (1883), p. 268; *V. Volterra,* ibid. Trans. (3) 8 (1884), p. 214, 244; *F. Kötter,* Über das Gleichgewicht biegsamer unausdehnsamer Flächen, Diss. Halle 1883 und J. f. Math. 103 (1888), p. 44; *E. Daniële,* Sul equilibrio delle reti, Palermo, Circolo 13 (1898), p. 13.

312) Die infinitesimale Deformation ist also die erste Annäherung der von einem Parameter ε abhängigen Transformationen:

$$\bar{x} = x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots;$$

wird die Bedingung der Isometrie hinzugefügt, so kann man diese Transformationen mit beliebiger Annäherung durch Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung mittelst *Quadraturen* ermitteln, wenn das Problem der infinitesimalen Isometrie vollständig gelöst ist, *Darboux,* Leçons 4, p. 5.

trieen anzugeben, bei denen eine solche Kurve fest bleibt, ohne als Haupttangentenkurve der deformierten Fläche sich zu erhalten[313]). Auch wird bei der infinitesimalen Isometrie nach *Ribaucour*

$$\delta\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) = 0$$

bis auf Glieder in ε^2, während bei einer infinitesimalen Biegung $\delta(k)$ *identisch* verschwindet.

Nach (2) bilden die Flächen $F(xyz)$ und $F'(x_1 y_1 z_1)$ ein *Moutard*-sches[314]) oder *Ribaucour*'sches Flächenpaar und die Aufgabe der infinitesimalen Isometrie besteht in der Aufsuchung solcher Paare. Jede infinitesimale Isometrie liefert aber auch ein isometrisches Flächenpaar[315]) mit den Koordinaten:

$$\xi_1 = x + tx_1, \quad \eta_1 = y + ty_1, \quad \zeta_1 = z + tz_1,$$
$$\xi_2 = x - tx_1, \quad \eta_2 = y - ty_1, \quad \zeta_2 = z - tz_1,$$

denn es ist für jedes *konstante* t:

$$d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 = d\xi_2^2 + d\eta_2^2 + d\zeta_2^2.$$

Man löst die Gleichung (2) bei gegebenen x, y, z durch den *Darboux*'schen Ansatz[316]):

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_1 = c\,dy - b\,dz, \\ dy_1 = a\,dz - c\,dx, \\ dz_1 = b\,dx - a\,dy, \end{cases}$$

woraus für

$$b = p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad a = -q_1 = -\frac{\partial z_1}{\partial y}$$

mit Hülfe der Integrabilitätsbedingungen (II A 5, Nr. 58) von (3) die *Jellett*'sche Gleichung[317])

---

313) *Weingarten,* Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, J. f. Math. 100 (1887), p. 296 u. 309. Da es also infinitesimale Deformationen giebt, die nicht unendlich kleine Elementarstufen endlicher Biegungen sind, scheint es angemessen, infinitesimale Biegung und Isometrie zu unterscheiden.

314) *Moutard,* Paris soc. Philom. Bull. (1869), p. 45; Paris, C. R. 70 (1870), p. 834; 96 (1883), p. 766; *A. Ribaucour,* Paris Soc. Philom. Bull. (1869), p. 37.

315) *Weingarten,* J. f. Math. 100, p. 300. Umgekehrt bilden für zwei isometrische Flächen $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$; $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$; $x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$, $x_1 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}$ etc. ein *Moutard*-sches Paar und die *Mittelfläche* derselben ist einer infinitesimalen Isometrie fähig, bei der jeder Punkt in der Verbindungslinie der korrespondierenden Punkte verschoben wird; vgl. *Bianchi,* p. 288. Die Tangenten einer Fläche, welche senkrecht zur Verschiebungsrichtung bei einer infinitesimalen Isometrie stehen, bilden ein W-Strahlensystem (*Bianchi,* p. 316).

316) *Darboux,* Leçons 4, p. 8.

317) *Jellett,* Fussn. 180, p. 347.

$$rt_1 + tr_1 - 2ss_1 = 0$$

entsteht, welche nach *Darboux*[318]) aussagt, dass die Haupttangentenkurven von F bei orthogonaler Projektion auf F' ein konjugiertes System der letzteren bilden.

Eine *zweite* Behandlung ergiebt sich vermöge der Benutzung der *Lelieuvre*'schen Formeln[319]) (Einführung der Haupttangentenkurvenparameter u, v von F).

Sind $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ drei partikuläre Lösungen der *Moutard*'-*Laplace*'schen Gleichung (II A 5, Nr. **53**):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

und ω ihre allgemeine Lösung, so kann man die Koordinaten x, y, z von F auf die Form

$$a_x = \int du\,(a\theta\theta_u) - \int dv\,(a\theta\theta_v) \tag{4}$$

bringen[320]); die Fläche F' ist dann durch

$$a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 \tag{5}$$
$$= \int du\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}a_\theta - \omega\frac{\partial a_\theta}{\partial u}\right) - \int dv\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}a_\theta - \omega\frac{\partial a_\theta}{\partial v}\right)$$

bestimmt, dabei ist:

$$M = -f + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u\,\partial v},$$

wo f der Koeffizient von $2du\,dv$ des sphärischen Bildes der Haupttangentenkurven von F und $\varrho^2 k = -1$ ist.

Weingarten[321]) zerlegte die Gleichung (2) in:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

318) *Darboux*, Leçons 4, p. 10.

319) *L. Lelieuvre*, Bull. scienc. math. 12 (1888), p. 126 (III D 3, Nr. **9**). Ähnliche Formeln zur Darstellung einer Fläche in Bezug auf ihre Minimalkurven geben *E. Cosserat*, Paris, C. R. 125 (1897), p. 159; noch einfacher *E. Goursat*, Paris soc. math. Bull. 26 (1898), p. 8.

320) Die Gleichungen (4), (5) sind Identitäten in Bezug auf die willkürlichen Koeffizienten a, die Klammerausdrücke rechts sind dreireihige Determinanten, $a_x = a_1x + a_2y + a_3z$, $a_\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$, $\theta_u = \frac{\partial\theta}{\partial u}$; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 24; *Bianchi*, p. 295.

321) *Weingarten*, Berlin. Ber. 1886, p. 83; J. f. Math. 100 (1887), p. 299.

und findet mittels der invarianten *Verschiebungs-* oder *charakteristischen Funktion*[322]):

$$\varphi = \frac{1}{2T}\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

welche der Gleichung

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N\frac{\partial \varphi}{\partial u} - M\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{kT}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L\frac{\partial \varphi}{\partial v} - M\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{kT}\right) + Th\varphi = 0$$

genügen muss, die x_1, y_1, z_1 durch Quadraturen.

Die Gleichung (6) wird nach *Bianchi* durch Einführung des sphärischen Bildes von F in die Form[323])

$$L\varphi_{22} - 2M\varphi_{12} + N\varphi_{11} = 0$$

gebracht. Da nun der Abstand der Tangentenebene von F vom Anfang der Koordinaten den Gleichungen[324])

$$\psi_{11} + L = 0,$$
$$\psi_{12} + M = 0,$$
$$\psi_{22} + N = 0$$

genügt, so erhält man, wenn φ als Abstand der Tangentenebene einer Fläche Φ mit demselben sphärischen Bilde wie F angesehen wird, deren Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L_1, M_1, N_1 sind, an Stelle von (6) die Gleichung in der *Jellett*'schen Form:

$$(7)\qquad N_1 L - 2MM_1 + L_1 N = 0,$$

oder:

$$\varphi_{11}\psi_{22} - 2\varphi_{12}\psi_{12} + \varphi_{22}\psi_{11} = 0.$$

Die beiden durch parallele Normalen zugeordneten Flächen F und Φ heissen wegen der durch (7) bedingten Reziprozität *associiert*[325]). Die Entfernung der Tangentenebene vom Anfang für die *eine* Fläche ist eine charakteristische Funktion der *andern*, und die Developpabelen der Kongruenz der Verbindungslinien korrespondierender Punkte von F und Φ schneiden jede dieser Flächen in konjugierten Systemen mit gleichen Invarianten der betreffenden *Laplace*'schen Differential-

322) So *Bianchi*, p. 289. Die Invariante φ bedeutet nach *V. Volterra* (Roma Lincei Rend. (4) 1 (1884), p. 274: Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestensibili) die nach der Normale von F genommene Drehungskomponente des Flächenelementes von φ. Vgl. auch *A. Voss*, Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche, Münch. Ber. 1897, p. 229.

323) Die Bedeutung der Symbole φ_{ik} bei *Bianchi*, p. 292.

324) Siehe *Weingarten*, Festschrift d. techn. Hochschule, Berlin 1884.

325) Der Begriff *associierter* Flächen wird eingeführt von *Bianchi*, Roma Lincei Rend. (5) 1 (1892), p. 41; vgl. *Bianchi*, p. 293.

gleichung[326]). Endlich kann auch die Gleichung (7) durch die *Lelieuvre*'sche Transformation und die Substitution[327])

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \theta$$

wieder auf die *Moutard*'sche Normalform

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta \tag{8}$$

gebracht werden[328]).

Nach (7) entsprechen den Haupttangentenkurven von F konjugierte Systeme gleicher Invarianten von Φ. Und da umgekehrt zu jedem solchen System auf einer willkürlichen Fläche Φ eine Fläche F mit *Moutard*'scher Zuordnung gehört, so ist die *Bestimmung der infinitesimalen Isometrieen einer Fläche Φ identisch mit der Bestimmung aller konjugierten Systeme gleicher Invarianten*[329]). Hieraus geht auch hervor, dass die infinitesimalen Isometrieen irgend einer Fläche aus denen einer ihrer *projektiven Umformungen* gefunden werden können[330]). Bei *Darboux* finden sich noch andere Transformationen, die in Bezug auf das Problem der infinitesimalen Isometrie invariant sind, so ausser der dualistischen Umformung die zusammengesetzte Inversion[331]). Insbesondere kann man für jede durch *Bianchi*'s Prozess aus einer Fläche konstanter Krümmung entstehende Fläche (Nr. 29) die sämtlichen infinitesimal isometrischen bestimmen, falls dies für die ursprüngliche geschehen ist[332]). Die infinitesimale Isometrie der

326) *Bianchi*, p. 295.

327) Bei positiv gekrümmten Flächen erreicht man auf reellem Wege eine ähnliche Normalgleichung durch Einführung der *isotherm konjugierten* Systeme, *Bianchi*, p. 296 (III D 3, Nr. 42).

328) Eine *vierte* Behandlung des Problems beschränkt sich auf die Ermittelung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der infinitesimal deformierten Flächen; sie führt insbesondere bei den Regelflächen zum Ziel (*Bianchi*, p. 307), deren allgemeine auf Haupttangentenkurven bezogene Darstellung durch G. *Königs*, Paris, C. R. 106, p. 57 bekannt ist.

329) *E. Cosserat*, Paris, C. R. 115 (1892), p. 1252; Sur les congruences de droites, Toulouse Ann. 7, Nr. 60 (1892); vgl. *A. Voss*, Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891), p. 207 ff.; *Darboux*, Leçons 4, p. 51. Man vgl. auch *Bianchi*'s Satz: das konjugierte System von F, das den Haupttangentenkurven der bei einer infinitesimalen Isometrie associierten Fläche φ entspricht, bleibt bei dieser Isometrie *konjugiert*, *Bianchi*, p. 299.

330) Direkter Beweis bei *Darboux*, Leçons 4, p. 76 vermöge der Eigenschaften der identischen Kovariante bei der Transformation von Ebenen und Punktkoordinaten (I B 2, Nr. 2).

331) *Darboux*, Leçons 4, p. 80 ff. inversion composée; noch allgemeiner p. 83.

332) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 7 (1891), p. 19 und 223; vgl. *Darboux*, Leçons 4, p. 40; daselbst auch die partielle Differentialgleichung für die Isometrien der Flächen mit konstantem k.

Flächen zweiten Grades reduziert sich auf die der Kugel, deren Bestimmung schon *Ribaucour* mit Hülfe der Minimalflächen gegeben hat[333]). Die der Kugel nach *Moutard* zugeordneten Flächen sind umgekehrt durch eine *äquidistante* infinitesimale Isometrie ausgezeichnet[334]). Die infinitesimale Isometrie der *Minimalflächen* führt nach *Darboux*[335]) auf die Gleichung:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \theta\,(U - V).$$

Es sei hier endlich noch hingewiesen auf die allgemeineren Untersuchungen über infinitesimale Deformationen, welche den infinitesimalen Berührungstransformationen (III D 8) entsprechen, und auf deren Anwendung auf *geometrisch-physikalische Theorieen*[336]).

33. Das Problem der sphärischen Abbildung. Das *allgemeine Problem*[337]) verlangt die Bestimmung derjenigen Flächen F, für die das Längenelement

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

der sphärischen Abbildung *gegeben* ist. Man hat dann zuerst die Koordinaten X, Y, Z des betreffenden Kugelpunktes (wenn sie nicht direkt gegeben sind) aus der zugehörigen *Riccati*'schen Gleichung zu bestimmen, sodann die Fundamentalgrössen L, M, N aus den für diesen Zweck in Bezug auf die sphärische Abbildung umgeformten *Codazzi*'schen Gleichungen[338]) (III D 3, Nr. **23**), und endlich die x, y, z vermöge der *Quadraturen*

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}(eg - f^2) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(fM - gL) + \dfrac{\partial X}{\partial v}(fL - eN), \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(eg - f^2) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(fN - gL) + \dfrac{\partial X}{\partial v}(fM - eN) \end{cases}$$

zu ermitteln. Ein besonders einfacher, von *Dini*[339]) zuerst bemerkter Fall ist der, wo die Abbildung der *Haupttangentenkurven* von F gegegeben, also $L = N = 0$ ist, während M aus den *Codazzi*'schen

---

333) *Ribaucour,* Étude, p. 63.

334) *Darboux,* Leçons 4, p. 15; vgl. *A. Mehling,* Diss. Würzburg 1898.

335) *Darboux,* Leçons 4, p. 93.

336) *H. Bruns,* Das Eikonal, Leipz. Abh. 21 (1895), p. 323; *F. Hausdorff,* Infinitesimale Abbildungen in der Optik, Leipz. Ber. 48 (1896), p. 79.

337) *U. Dini,* Supra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni, Ann. di mat. (2) 4 (1870), p. 175.

338) Diese reduzieren sich hier auf *zwei*; die dritte liefert das Krümmungsmass der Kugel und ist eine Identität.

Gleichungen durch Quadratur folgt; die Gleichungen (1) werden dann für $k = -1/\varrho^2$:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}(eg - f^2) = \varrho\left(f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(eg - f^2) = \varrho\left(f\dfrac{\partial X}{\partial v} - g\dfrac{\partial X}{\partial u}\right), \end{cases}$$

und das Längenelement der somit durch Quadratur bestimmten Fläche[340]) F wird:

$$ds^2 = \varrho^2(edu^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2).$$

Ist dagegen die sphärische Abbildung eines *konjugierten* Systems von F gegeben, so bleibt ausser den Quadraturen noch eine *Laplace*'sche Gleichung zu lösen.

Unter dem *speziellen Problem der sphärischen Abbildung* versteht man die Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, die ein gegebenes sphärisches Bild der *Krümmungslinien* haben. *Darboux* hat seit 1868 sich mit diesem für die Lehre von den infinitesimalen Isometrieen, den isometrischen Flächenpaaren[341]) und den Krümmungslinien wichtigem Probleme beschäftigt, und verschiedene Lösungen desselben gegeben[342]).

Ist die Tangentenebene von F im Punkte P[343]):

$$(3)\qquad (\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0,$$

wo ξ eine Funktion der *Bonnet*'schen Variabeln α, β (III D 3, Nr. 7), so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$(4)\qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = 0,$$

wenn

---

339) *Dini*, ibid. p. 183. Durch Einführung der isotherm konjugierten Systeme bei Flächen positiver Krümmung entwickelt *Bianchi*, p. 136, einen ähnlichen Satz.

340) Vgl. z. B. *Bianchi*, p. 125; 141.

341) Über den Zusammenhang desselben mit den cyklischen Systemen *Ribaucour*'s vgl. *Bianchi*, p. 345.

342) *Darboux*, Bestimmung der Flächen, deren Krümmungslinien zum Bilde konfokale Ellipsen und Hyperbeln haben, Paris, C. R. 68 (1869), p. 253; dort auch der Satz, dass, wenn zwei Flächen $x = f$, $y = \varphi$, $z = \psi$ und $x = F$, $y = \Phi$, $z = \Psi$ dasselbe sphärische Bild der Krümmungslinien haben, dasselbe auch von der *Resultante* $x = af + bF$, $y = a\varphi + b\Phi$, $z = a\psi + b\Psi$ gilt; Lösung mit Hülfe der Ebenenkoordinaten Paris, C. R. 94 (1882), p. 120, 158, 1290, 1343 und 96 (1883), p. 366; sodann allgemeine Behandlung des Problems Ann. éc. norm. (3) 5 (1888), p. 78 (III D 3, Nr. 35).

343) Dies ist *O. Bonnet*'s auf die Minimalkurven der Kugel bezogenes Koordinatensystem, J. de math. (2) 5 (1860), p. 227.

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$$

gesetzt ist.

Die Koordinaten des zu P gehörigen Kugelpunktes p sind ferner:

$$X = \frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad Y = i\,\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad Z = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}, \tag{5}$$

und als Funktionen der Parameter u, v eines Orthogonalsystems auf der Kugel gegeben. Sollen sie den Krümmungslinien von F entsprechen, so folgt aus (4):

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\lambda^2 \frac{\partial q}{\partial v}; \tag{7}$$

also nach (5) und (6):

$$\frac{\partial\left(\frac{X - Yi}{1 - Z}\right)}{\partial u} = \lambda^2 \frac{\partial\left(\frac{X + Yi}{1 - Z}\right)}{\partial u}, \tag{8}$$

womit λ bekannt ist; zugleich wird bei reellen Lösungen mod. $\lambda = 1$. Zur Ermittelung von ξ muss man noch p und q auf die allgemeinste Weise aus (7) bestimmen, oder die Gleichung

$$\frac{1}{\lambda q}\frac{\partial^2 \lambda q}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} \tag{9}$$

lösen. Dies ist aber dieselbe Differentialgleichung, auf die *Darboux*[344]) das Problem der infinitesimalen Isometrie einer auf ihre Haupttangentenkurven bezogenen Fläche zurückführte; ein Zusammenhang, der auf den Berührungstransformationen beruht, welche Haupttangentenkurven in Krümmungslinien verwandeln[345]) (III D 8).

Die Fälle, in denen sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta \tag{10}$$

344) *Darboux*, Leçons 1, p. 24 und 4, p. 171; vgl. *G. A. Nitsche*, Diss. Leipzig 1898, p. 64.

345) In der That ordnet diese *Lie*'sche Transformation den infinitesimalen Isometrieen einer Fläche mit bekannten Haupttangentenkurven eine andere Fläche mit bekannnten Krümmungslinien zu, für die das Problem der sphärischen Abbildung gelöst ist. — Und ebenso entspricht der Lösung des Problems der infinitesimalen Isometrie für alle collinear verwandten Flächen die des Problems der sphärischen Abbildung für alle durch reziproke Radien verwandten, *Darboux*, Leçons 4, p. 177.

vollständig nach der Methode von *Laplace* lösen lässt, sind nach *Darboux* bekannt. Da aber nach (8) mod. $\lambda = 1$ bei reeller Zuordnung sein muss, so entsteht die Frage nach den integrierbaren Gleichungen dieses besonderen Charakters; es ist *Darboux* gelungen, dieselbe zu erledigen[346]).

34. Die isometrischen Flächenpaare. Die Bedingung isometrischer Flächenpaare F, F' führt auf die totale Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 \text{ (Nr. 32)}, \tag{1}$$

oder für:

$$x - x_1 = \xi_1, \quad x + x_1 = \xi_2 \text{ etc.}$$

auf:

$$d\xi_1 d\xi_2 + d\eta_1 d\eta_2 + d\xi_1 d\xi_2 = 0, \tag{2}$$

mithin auf die *Moutard'sche* Zuordnung (vgl. Nr. **13**). Die weitere Verfolgung dieses Gesichtspunktes liefert die merkwürdige Gruppe der zwölf Flächen[347]), und die Möglichkeit, aus jedem Flächenpaare fünf andere durch eine bereits 1869 von *Ribaucour*[348]) gegebene Konstruktion abzuleiten.

Für die Aufgabe, aus einem Paare isometrischer Flächen F, F' durch Transformation neue Paare F, F′ herzuleiten, hat schon *Peterson*[349]) 1868 eine, durch *Stäckel*[350]) weiter entwickelte Methode gegeben.

Ist nämlich:

$$ds^2 = ds_1^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

so setze man, um der für F, F′ erforderlichen Beziehung $ds^2 = ds_1^2$ zu genügen, für die Koordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1 dieser Flächen die Gleichungen

$$dX = P\frac{\partial x}{\partial u} du + Q\frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dX_1 = P\frac{\partial x_1}{\partial u} du + Q\frac{\partial x_1}{\partial v} dv$$

an. Vermöge der Integrabilitätsbedingungen müssen die unbekannten Funktionen P, Q der Gleichung

346) Vgl. *Darboux*, Leçons 2, p. 23—218; 4, p. 178 ff.

347) *Darboux*, Leçons 4, p. 48 ff.

348) *Ribaucour*, Étude, p. 229.

349) *Peterson*, p. 50 vgl. *B. Mlodzieiowski*, Bull. sciences math. (2) 15 (1891), p. 97.

350) *P. Stäckel*, Über Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 (1896), p. 255, insbesondere p. 273 ff. Vgl. auch *C. Guichard*, J. de math. (5) 2 (1896), p. 174.

$$\frac{\partial P \frac{\partial \theta}{\partial u}}{\partial v} = \frac{\partial Q \frac{\partial \theta}{\partial v}}{\partial u}$$

für $\theta = x, y, z;\ x_1, y_1, z_1$ genügen; man erhält so bei Voraussetzung des gemeinsamen konjugierten Systems (Nr. 2) von F und F' für P, Q zwei lineare Differentialgleichungen, die in gewissen Fällen eine einfache Behandlung gestatten.

P. Adam[351]) bemerkte, dass aus der Isometrie von F und F' auch die von

$$\mathrm{F}\begin{cases} X = x + b(z+z_1) - c(y+y_1) \\ Y = y + c(x+x_1) - a(z+z_1) \\ Z = z + a(y+z_1) - b(x+x_1) \end{cases}$$

$$\mathrm{F}'\begin{cases} X_1 = x_1 - b(z+z_1) + c(y+y_1) \\ Y_1 = y_1 - c(x+x_1) + a(z+z_1) \\ Z_1 = z_1 - a(y+y_1) + b(x+x_1) \end{cases}$$

folgt. Daran knüpfte *Stäckel*[352]) die allgemeine Frage nach der Transformationsgruppe, welche dem *Liouville*'schen Satze zufolge (Nr. 6)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (i dx_1)^2 + (i dy_1)^2 + (i dz_1)^2$$

in

$$\varrho^2 [dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (i dX_1)^2 + (i dY_1)^2 + (i dZ_1)^2]$$

verwandelt, d. h. nach den *konformen Transformationen* der Mannigfaltigkeit $x, y, z;\ x_1, y_1, z_1$.

Im allgemeinen erfordert die Befriedigung der Bedingung (1) die Lösung der Gleichung:

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = dy_1^2 + dz_1^2, \tag{3}$$

wenn man

$$x = \xi_1, \quad y = \xi_2, \quad z = \xi_3, \quad x_1 = i\xi_4$$

setzt, d. h. die Bestimmung von *Flächen* Ξ im Raume von *vier* Dimensionen, die auf die Ebene y_1, z_1 isometrisch abgebildet sind. Diesen an die Vorstellungen der *nicht-euklidischen Geometrie* (III A 1) und der *Liniengeometrie Plücker*'s (III C 9) anknüpfenden Weg hat neuerdings *Guichard*[353]) eingeschlagen, der in charakteristischen Fällen die Gleichung (3) integriert, und so dem Problem der isometrischen Paare neue Gesichtspunkte eröffnet.

---

351) *P. Adam,* Paris soc. math. Bull. 23 (1895), p. 26.

352) *P. Stäckel,* Paris, C. R. 121 (1895), p. 396; sur un groupe continu de transformations avec 28 paramètres (von diesen ∞^{28} Transformationen sind indess nur ∞^{15} wesentlich); vgl. *C. Guichard,* J. de math. (5) 2 (1896), p, 215.

353) *C. Guichard* in der preisgekrönten Arbeit: Sur la déformation des surfaces, J. de math. (5) 2 (1896), p. 123.

Verlangt man insbesondere, dass

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1 \tag{4}$$

wird, so findet sich, vermöge einer auf die Krümmungslinien der auf der *Hypersphäre* (4) gelegenen Fläche $\Xi(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ bezogenen Untersuchung, für die Flächen F und F' die Beziehung, dass der Abstand d eines Punktes P von F von einem festen Punkte und der Abstand d_1 des korrespondierenden Punktes P' von F' von einer festen Ebene durch die Gleichung

$$d^2 - d_1^2 = \text{const.}$$

verbunden ist.

Eine besonders merkwürdige Isometrie besteht endlich darin, dass die Entfernung korrespondierender Punkte P, P' von F und F' *unveränderlich* ist. Bilden die Richtungen PP' eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, so hat man einen bereits von *Ribaucour*[354]) untersuchten Fall; die Kongruenz der Strahlen PP' ist eine *isotrope* (Nr. **13**), ihre Mittelfläche steht mit der Kugel in *Moutard'scher* Beziehung und die explicite Gleichung dieser Flächenpaare lässt sich nach *Caronnet*[355]) leicht angeben; ist das Gebiet der Richtungen PP' eindimensional, so entstehen gewisse Paare von Regelflächen, die mehrfach untersucht sind, und sich leicht konstruieren lassen[356]).

E. Geometrische und mechanische Modelle zur Lehre von der Abbildung und Abwickelung der Flächen.

35. Geometrische und mechanische Modelle. Zu anschaulichen Vorstellungen führt die Betrachtung der krummen Fläche als Grenze eines umbeschriebenen Polyeders (I A 3, Nr. **11**). Demgemäss lassen sich manche Hauptsätze der Biegungstheorie durch die Deformation eines ungeschlossenen Polyeders veranschaulichen[357]). Besonders wichtig wird dabei das gemeinsame konjugierte System zweier isometrischer Flächen; da dasselbe jede der Flächen in *ebene* infinitesimale Vierseite zerlegt, so kann man die Formänderung als Deformation eines Polyeders mit

---

354) *A. Ribaucour,* Étude, p. 60.

355) *Th. Caronnet,* Sur des couples de surfaces applicables, Paris soc. math. Bull. 21 (1893), p. 134.

356) *Caronnet,* ibid.; *X. Antomari,* Paris soc. math. Bull. 22 (1894), p. 58; *E. Genty,* ibid. p. 36; *A. Demoulin,* ibid. 23 (1895), p. 71; *P. Adam,* ibid. 23, p. 219.

357) *E. Kretschmer,* Die krumme Fläche für die Theorie der Krümmung als Grenze eines eingeschriebenen Polyeders, Programm Friedr. Wilhelmsgymnasium Posen, 1875.

ebenen infinitesimalen viereckigen Seitenflächen ansehen[358]). Auch *Gauss'* Satz von der Erhaltung des Krümmungsmasses findet nun seine Erläuterung, denn für die vier an einem Punkte anstossenden Kantenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ solcher konjugierten Vierseite und den Flächeninhalt df eines derselben findet beim Grenzübergang die Gleichung[359])

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi - k\,df$$

statt. Auch für technische Fragen kann diese Auffassung nützlich werden[360]).

Sodann finden die konformen Abbildungen physikalisch in mehrfacher Weise Anwendung und Realisierung durch *stationäre elektrische Strömungen* (V 15 ff.). Die Stromkurven und die Kurven konstanten Potentials bilden ein Orthogonalsystem, dessen konforme Abbildungen auf irgend eine Fläche wieder eine mögliche Strömungsbewegung liefern[361]). Übrigens kann man auch durch ein elektrolytisches Verfahren diese Kurvensysteme direkt sichtbar machen[362]). In instruktiver Weise hat *Finsterwalder*[363]) die konforme Abbildung durch *deformierbare Geflechte* aus drei Scharen von unter unveränderlichen Winkeln

---

358) Das gemeinsame konjugierte System (*Peterson's* Biegungslinien, *Peterson,* p. 58) ist indess nicht immer *reell*; so z. B. gerade für den Fall der isometrischen Minimalflächen, vgl. Fussn. 14.

359) Vgl. *E. Kretschmer,* Fussn. 357; auch *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math.-Verein. 6 (1899), p. 61; sodann *L. Natani* in *Joachimsthal's* Anwendung der Differentialr., p. 233; *R. Sturm,* Ein Analogon zu *Gauss'* Satz von der Krümmung der Flächen, Math. Ann. 21 (1883), p. 379; in weiterer Ausführung *P. Pizzetti,* Sui poliedri deformabili, Roma Lincei Rend. (5) 7 (1898), p. 19.

360) *M. Lévy,* Sur une application industrielle du théorème de Gauss, Paris, C. R. 86 (1878), p. 111.

361) So für die elektrische stationäre Strömung *G. Kirchhoff,* Berlin Ber. 1875, p. 487; *A. Töpler,* Ann. Phys. Chemie 160 (1877), p. 375; in weiterer Ausführung bei *F. Klein,* Über *Riemann's* Theorie der algebraischen Funktionen ihre Integrale, Leipzig 1882; Autogr. Vorlesungen über *Riemann'sche* Flächen, I, Göttingen 1894, p. 13 ff. In Bezug auf die Anwendungen auf hydrodynamische Probleme vgl. z. B. *G. Kirchhoff,* Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig 1876, p. 273 ff.; *E. Beltrami,* Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 329; Opere 1, p. 318; *H. Lamb,* Hydrodynamics, Cambridge 1895, p. 114, 253; für nicht wirbelfreie Bewegungen ist die konforme Abbildung übrigens von beschränkter Anwendbarkeit, vgl. *E. Zermelo,* Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 201.

362) *A. Guébhard,* Sur une méthode expérimentale propre à déterminer les lignes de niveau, Paris, C. R. 90 (1884), p. 984; vgl. auch Journ. phys. 2 (1882), p. 205.

363) *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math.-Verein. 6 (1899), p. 48.

sich kreuzenden Drähten veranschaulicht, welche auf stetig gekrümmten Flächen ausgebreitet werden können, und damit eine Reihe weiterer Untersuchungen geschaffen, die im folgenden noch kurz dargelegt werden sollen.

Bei der Verbiegung einer *Lamelle*, d. h. eines aus Flächenelementen gebildeten Streifens mit einer bestimmten *Axe* in eine *ebene* Lamelle wird nach *Minding* die geodätische Krümmung der Lamellenaxe gleich der gewöhnlichen Krümmung der Axe der ebenen Lamellen. Besteht nun ein „*Geflecht*“ solcher Lamellen aus ebenen geradlinigen Elementen, die zu je vier durch einen Punkt gehend, Seiten und Diagonalen eines Vierseits bilden, so erhält man durch Deformation derselben „*Häute*“, die sich auf jeder Fläche positiver oder negativer konstanter Krümmung ausbreiten lassen. Eine andere Flächenklasse wird gebildet aus dem Geflecht von Lamellentripeln; endlich liefert das Geflecht aus zwei Scharen geradliniger Lamellen, die durch zu einander orthogonale Diagonaldrähte geeignet verbunden sind, bei der Deformation die *Liouville'schen* Flächen.

Ganz anders verhalten sich die Geflechte, bei denen die Flächenelemente der Lamellen nicht wie vorhin, tangential, sondern „*hochkant*“, d. h. senkrecht zu der betreffenden Fläche angeordnet werden, auf welcher ihre Axen nun *Versteifungsrippen* bilden. Betrachtet man auch hier geradlinige Lamellen, so entstehen bei der Deformation Häute, auf denen jene Rippen die *Hauptangentenkurven* bilden; insbesondere lassen sich so auch die *Minimalflächen* veranschaulichen, wenn man für die Erhaltung rechter Winkel zwischen den Rippen sorgt[364]).

In naher Beziehung zu diesen mechanisch-geometrischen Modellen stehen die aus gegeneinander beweglichen starren Gliedern gebildeten *Netze* und deren Gestaltsveränderungen unter dem Einfluss gegebener Kräfte. Es sei damit zugleich hingewiesen auf die mannigfachen Untersuchungen, die auch analytisch von weitergehenden Gesichtspunkten aus über solche biegsame unausdehnbare und dehnbare Netze geführt sind[365])

Modelle zur Demonstration der Flächenbiegung und der Theorie der Flächen konstanter Krümmung (III D 5, Nr. **32** ff.) sind von 1882—1885 unter Leitung von *A. Brill*[366]) sowohl aus Gips als auch aus

364) In ähnlicher Weise lassen sich auch *Stäckel*'s Rotationsflächen (Fussn. 15) zur Darstellung bringen. Modelle von verbiegbaren Minimalflächen sind von *S. Finsterwalder* angegeben.

365) Siehe Fussn. 311.

366) Man vgl. den Katalog von mathemat. Modellen von *J. Brill*, Darm-

biegsamen Metallstreifen zum Auflegen auf andere Flächenstücke, desgleichen auch von *Finsterwalder*[367]) und anderen hergestellt.

Es sei endlich noch hervorgehoben, dass alle diese Modelle nicht nur für Demonstrationen, sondern auch in heuristischer Beziehung von Wichtigkeit sind.

---

stadt 1892, jetzt: Katalog mathem. Modelle, veröffentlicht durch die Buchhandlung von *M. Schilling,* Halle a. S. 1903, p. 102—111; sowie den Katalog mathemat. Modelle, München 1892, p. 291.

367) „Häute" aus Papierstücken von konstanter negativer Krümmung, Katalog, München, p. 293. Übrigens hat schon *J. C. Maxwell* 1854, Scient. Papers 1, p. 80 die Flächen in Rücksicht auf ihre Verbiegung als Grenze eingeschriebener Polyeder betrachtet (vgl. Fussn. 359); daselbst auch p. 86, 98 die in Fussn. 358 *Peterson* zugeschriebenen „lines of bending", sowie p. 95 der in Fussn. 12 erwähnte Satz über das gemeinsame System der Biegungslinien auf zwei isometrischen Flächen.

(Abgeschlossen im August 1903.)

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Darwin, G. H., Professor an der Universität Cambridge, Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von A. Pockels. Mit 43 Illustrationen im Text. [XXII u. 344 S.] 8. 1902. Eleg. geb. *M.* 6.80.

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 8.— In Leinw. geb. *M.* 9.—

Fischer, Dr. Karl T., der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtslitteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. [VIII u. 94 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

——— neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper. Mit einem Anhange über das absolute Maßsystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. Mit 55 Figuren im Text. [VI u. 68 S.] gr. 8. 1902. geb. *M.* 2.—

Föppl, Prof. Dr. Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 44.—

I. Band. **Einführung in die Mechanik.** (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900 geb. n. *M.* 10.—
II. — **Graphische Statik.** (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII. u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—
III. — **Festigkeitslehre.** (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. *M.* 12.—
IV. — **Dynamik.** (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. *M.* 12.—

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. *M.* 3.—. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 5. Aufl. [IV u. 187 S.] 1903. II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. [X u. 186 S.] 1901.

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [VIII u. 266 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 14.—

Hammer, Dr. E., sechsstellige Tafel der Werte $\log^{10} \frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10. (Vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log \frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 3.60.

Hensel, K., und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. *M.* 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 10.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. [X u. 564 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 18.—, geb. n. *M.* 20.—

Krazer, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 509 S.] In Leinw. geb. n. *M.* 24.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil. Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 20.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, die Proportion des goldenen Schnittes als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. [36 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 1.60.

3 7550 01697278 9

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. Arithmetik und Algebra, red. von Frz. Meyer.
Heft: 1. [112 S.] 1898. *M.* 3.40; 2. [112 S.] 1899. *M.* 3.40; 3. [128 S.] 1899. *M.* 3.80; 4. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 5. [208 S.] 1900. *M.* 6.40; 6. 272 S.] 1901. *M.* 7.20; 7. [128 S.] 1902. *M.* 3.60.

II. Analysis, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 2./3. [240 S.] 1900. *M.* 7.50; 4. [160 S.] *M.* 4.80. II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. *M.* 5.20.

III. Geometrie, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M.* 5.40.

IV. Mechanik, 2 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. *M.* 3.40; 2. [156 S.] 1902. *M.* 4.60.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. *M.* 3.80; 2. [131 S.] 1903. *M.* 3.80.

V. Physik, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80.

Unter der Presse:

VI. 1: Geodäsie u. Geophysik, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: Astronomie, red. von K. Schwarzschild.
VII. Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie **Generalregister.**

Abel, Niels Henrik, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. [XII u. 429 S.] 4. 1902. geh. n. *M.* 21.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Par Bjørnstjerne Bjørnson. — Introduction historique. Par Elling Holst. — Correspondance d'Abel comprenant ses lettres et crelles qui lui ont été adressées. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel en Norvégien. — Documents. Publiés par Carl Størmer. — Eclaircissements sur les documents. — Les études d'Abel et ses découvertes. Par L. Sylow.

Bardey, Dr. Ernst, algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Friedrich Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 8.—

Bauer, Dr. Gustav, Geheimrat, o. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, a. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 376 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 12.—, geb. n. *M.* 13.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von August Heller. 18. Band. [X u. 477 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 8.—

Blochmann, Dr. Rudolf in Kiel, die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage dargestellt. [24 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* —.60.

Bolyai de Bolya, Joannes, Libellus post saeculum quam Anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae scrutatorum regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. 4. [XVI u. 154 S.] gr. 8. 1902. geh. *M.* 6.—

——— ——— Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Iosephus Kürschak, Mauritius Réthy, Bela Tötössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. n. *M.* 4.—

Braunmühl, Professor Dr. **A. von**, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 10.—, geb. *M.* 11.—

Bruns, Dr. **Heinrich**, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [IV u. 160 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 3.40, geb. *M.* 4.—

Bucherer, Dr. **A. H.**, Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 2.40.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. *M.* 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. *M.* 14.—

SO-GBH-004